LES ESCALES MUSICALS

Les matemàtiques a l'art

Roser Homs Pons
IES Arquitecte Manuel Raspall
Curs 2005-2006
Tutor: Martí Casadevall

A en Martí Casadevall,
per haver-me ensenyat
a estimar les matemàtiques.

ÍNDEX

PRIMERA PART

SEGONA PART

INTRODUCCIÓ

Existeix alguna connexió entre les matemàtiques i la música?

De ben segur que, si sortíssim al carrer a preguntar-ho a la gent, la resposta majoritària seria que no, de cap manera. I és que la música és un art que fàcilment arriba a tothom mentre que les matemàtiques...Bé, són considerades per a molta gent com una matèria complicadíssima que tan sols serveix per fer la traveta als estudiants.

Des de fa uns quants anys, les matemàtiques i la música són els meus dos interessos principals. El treball de recerca ha estat una oportunitat per aprofundir en la relació que existeix entre les dues disciplines. Ara bé, un cop s'ha decidit el tema sobre el qual es pretén fer un petit estudi cal centrar-se en un àmbit concret. Massa vegades allò que hem viscut des de sempre és pres com a quelcom evident i natural. Ni tan sols ens plantegem que podria ser d'una altra manera.

Qualsevol músic, i els no-músics probablement també, sap que l'escala que utilitzem nosaltres des de fa segles té dotze notes i, tot i que els temperaments i els sistemes d'afinació han anat variant, no ho ha fet el nombre de notes. Crec que és molt interessant per una persona que es dedica a la música, que n'escolta, que en toca o que, simplement, li agrada, preguntar-se el motiu pel qual tenim aquesta escala. En definitiva, totes les emocions i sentiments que transmet la música es duen a través de les notes, l'elecció de les quals està inevitablement determinada per l'escala que tinguem.

Així doncs, perquè tenim una escala de 12 notes? Perquè no en podria tenir més? O menys? És un nombre escollit a l'atzar?

El nostre propi sentit comú ens fa pensar que la resposta a l'última qüestió és un no rotund. En aquesta vida, poques coses són només fruit de l'atzar. Per tant, existeix algun criteri més o menys objectiu que pugui determinar com ha de ser una bona escala? És una qüestió purament cultural o de gustos?

Les preguntes que sorgeixen a mesura que es reflexiona sobre el tema són moltes. Així, aquest treball intentarà donar resposta a la majoria d'aquestes qüestions.

Per a poder seguir una línia de treball definida, dedicarem els nostres esforços a trobar una escala perfecta o, com a mínim, millor que la que tenim actualment. Ara bé, el camí a seguir serà la mateixa recerca qui l'anirà marcant.

Amb aquesta petita investigació intentarem estudiar i analitzar les possibles escales musicals tant des d'un punt de vista matemàtic com des del punt de vista de la música occidental. El fet de tenir aquestes dues visions del mateix objecte ens permet fer un anàlisi més global de tota la qüestió.

La primera part, els tres primers punts del treball, consisteix en un recull d'informació, tant bibliogràfica com d'organització i estructuració d'idees ja conegudes. Això ens permetrà definir uns criteris per poder, a la segona part, dedicar-nos plenament a la recerca d'una escala ideal.

PRIMERA PART

1. INTRODUCCIÓ MUSICAL

*"**música**: art que s'expressa mitjançant l'ordenació dels sons en el temps."*(*)

La música és un art que empra el so com a mitjà d'expressió. Potser és aquest fet el que ens fa difícil veure de manera intuïtiva que estigui lligada a una disciplina purament racional com són les matemàtiques. Ara bé, per poder transmetre i comunicar a través de la música hem de menester algun tipus de sistema, és a dir, unes bases a partir de les quals ens sigui possible expressar qualsevol cosa.

De la mateixa manera que la literatura es serveix de lletres que passaran a formar paraules i així adquiriran un significat, podríem dir que a la música hi passa quelcom de similar canviant aquestes lletres per notes.

I què és una nota? Doncs bé, qualsevol element musical o sonor ve definit per diferents paràmetres: la intensitat, l'altura i el timbre. L'únic factor que caracteritza una nota musical és la seva altura (grau d'agudesa del so; a més altura, més aguda és la nota), per tant, considerarem que si dos sons tenen la mateixa altura corresponen a la mateixa nota. Així doncs, les notes no són res més que sons i és evident que, encara que els restringim als que és capaç de captar l'oïda humana, n'hi ha un nombre elevadíssim. Això comporta la necessitat de limitar el nombre de notes a només uns sons concrets – o, potser, per ser més correctes, hauríem de dir altures concretes - de tot el ventall possible. Ara bé, amb quins criteris s'ha de realitzar aquesta selecció?

Aquí és on entra en acció el factor cultural. Cada cultura, segons les seves necessitats, ha utilitzat unes notes o altres. Avui en dia, tot i que la música occidental ha pres molt protagonisme, encara hi ha altres llocs, com l'Índia o l' Àfrica, on s'utilitzen sistemes radicalment diferents. Tanmateix, en aquest treball ens centrarem únicament en la música occidental.

(*) *Diccionari de la llengua catalana* de la *Gran Enciclopèdia Catalana*.

1.1 La música occidental

La història de la música occidental és, en poques paraules, una recerca per aconseguir tocar junts, és a dir, per fer coincidir notes en el temps. Aquesta voluntat és la que, sense dubte, ha guiat i determinat l'evolució dels nostres sistemes musicals. Tot seguit traçarem un petit recorregut al llarg de la història de la nostra música remuntant-nos als seus orígens, que tenen lloc a l'Edat Mitjana.

El cant gregorià, aparegut al segle IX, és considerat la manifestació musical occidental més antiga. Es tracta de música monòdica, és a dir, d'una única melodia on les notes sempre es succeeixen en el temps les unes a les altres. A partir del segle XI, el sistema que utilitzaven es coneix com a modes (escales) eclesiàstics. Cada mode és la manera d'ordenar les notes segons les distàncies entre elles. Existien vuit modes diferents i cadascun tenia set notes. Aquestes notes s'anomenaven ut-re-mi-fa-sol-la-si; com podem veure, pràcticament igual que ara. Ara bé, hem de pensar que l'altura d'aquestes notes no correspon - almenys no exactament - a la que els donem ara al nostre sistema actual.

Poc a poc va anar sorgint la necessitat de passar d'una sola veu o melodia a dues que sonessin alhora. La manera més primitiva de fer-ho aconseguint un resultat agradable a l'orella és fer una mateixa melodia doblada a l'octava[1]. Quan un home i una dona pretenen cantar junts la "mateixa" melodia ho fan de manera natural a una distància d'octava que, per posar un exemple, seria la distància entre un do qualsevol del piano i el següent que trobem al teclat. El següent pas consisteix en doblar la melodia a la quinta[1]. Si dues dones amb diferent tessitura volen cantar juntes una mateixa cançó ho faran de forma natural a una distància de quinta. D'aquesta manera va néixer la primera polifonia (dues o més veus a la vegada), que rep el nom d'organum.

[1] L'explicació física del perquè la octava i la quinta són les distàncies que produeixen sons més agradables a l'orella rau en la descomposició de qualsevol ona periòdica en una suma d'ones sinusoïdals (Teoria de Fourier) que s'explicarà més endavant.

De mica en mica aquella polifonia tan primitiva va anar evolucionant amb l'afegiment de més veus i la possibilitat d'utilitzar altres distàncies entre veus a més de l'octava i la quinta, com ara terceres i sisenes. Aquest procés va donar lloc, a finals de l' Edat Mitjana, a una polifonia molt més aconseguida: el discantus.

Amb l'arribada del Renaixement comença una tendència a la utilització de només dos dels vuit modes eclesiàstics: els modes corresponents als actuals major i menor. Apareixerà també el concepte de tonalitat[2] i es farà necessari l'ús de notes alterades (amb un sostingut que n'apuja l'altura o un bemoll que l'abaixa) per a poder tocar les escales majors i menors utilitzant qualsevol nota com a punt de partida.

Tots aquests factors propiciaran l'establiment del sistema tonal[3] durant el Barroc i la necessitat d'una escala temperada on les distàncies entre dues notes consecutives qualssevol sigui sempre la mateixa. D'aquesta manera, a mitjans del segle XVIII es començarà a generalitzar l'ús de l'escala temperada de dotze notes.

Tot i que d'aleshores ençà la manera d'utilitzar les notes ha canviat radicalment, les notes utilitzades des del Barroc a la música comercial actual, passant pel Romanticisme i la música atonal del segle XX, són exactament les mateixes: l'escala temperada de dotze notes.

S'ha de destacar, però, que alguns compositors del segle XX sí que han experimentat amb altres notes que no pertanyen a l'escala temperada, utilitzant quarts i vuitens de to[4].

[2] Tonalitat: Conjunt organitzat de notes al voltant d'una nota central. Al següent apartat s'explicarà més a fons.
[3] El sistema tonal és aquell que té la tonalitat com a unitat estructural bàsica i amb el qual s'ha escrit tota la música occidental del Barroc al Romanticisme.
[4] Distància que hi ha entre un do i un re o entre dues tecles blanques consecutives qualssevol del piano que tinguin una tecla negra al mig.

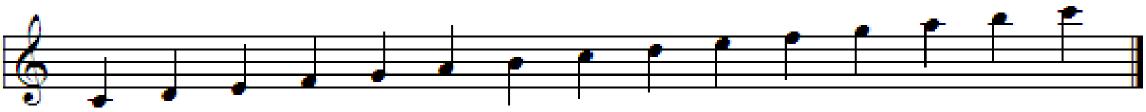
1.2 Tonalitat i escales

1.2.1 Concepte de distància en música

En música, quan parlem de distància entre dues notes ens referim a la diferència entre l'únic paràmetre mesurable que caracteritza cada nota: l'altura.

A l'apartat anterior ha aparegut el concepte d'octava. Totes les notes que es troben a distància d'octava duen el mateix nom. Per exemple, en un piano hi ha vuit tecles blanques que anomenem do. És evident que no són la mateixa nota perquè no tenen la mateixa altura però es troben a distància d'octava o de múltiples d'octava. És molt important tenir en compte que totes les notes que es trobin a distància d'octava o de múltiples d'aquesta seran considerades equivalents. Dit d'una altra manera, totes les notes que tinguin el mateix nom seran considerades equivalents.

També anomenem octava al conjunt de notes que hi ha des d'una nota concreta fins que apareix la seva octava. Al pentagrama inferior veiem com s'indica amb subíndex l'octava a la qual pertany cada nota. Per conveni, el do que es troba a la part inferior d'un pentagrama en clau de sol és el do 3. Les notes són físicament il·limitades (el límit el posa la nostra capacitat auditiva) tant cap amunt com cap avall; així doncs, el subíndex podrà ser tant un nombre positiu com negatiu.

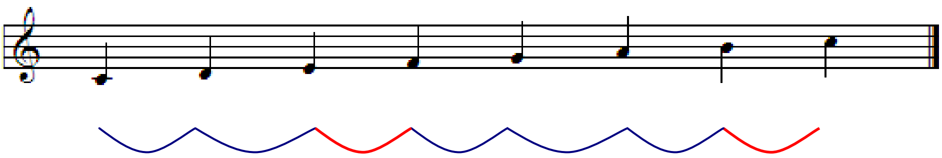


Do$_3$ Re$_3$ Mi$_3$ Fa$_3$ Sol$_3$ La$_3$ Si$_3$ Do$_4$ Re$_4$ Mi$_4$ Fa$_4$ Sol$_4$ La$_4$ Si$_4$ Do$_5$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Per exemple, els tres Do del pentagrama superior els hauríem de considerar equivalents. Aquí s'il·lustra el perquè en música s'anomena octava a aquesta distància. Per a parlar de distàncies musicals s'utilitza sempre el terme interval. L' interval entre dues notes es determina comptant totes les notes que hi ha entre elles incloent-hi la nota d'origen i la d'arribada o comptant línies i espais al pentagrama. El pentagrama ens mostra els intervals que hi ha entre el primer do i la resta de notes. Així doncs, també podem veure que entre el do i el sol hi ha un interval de quinta.

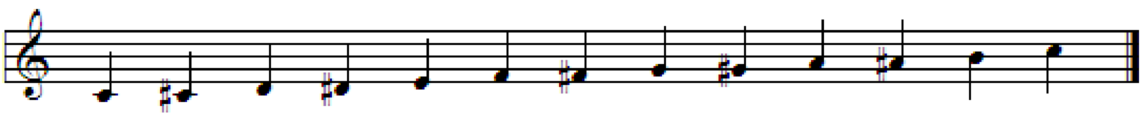
Ara bé, per determinar un interval cal utilitzar dos paràmetres: el primer, el general, ens indica quantes línies i espais de diferència hi ha al pentagrama (tal com s'explica al paràgraf anterior) i el segon, de caràcter més específic, es refereix a la quantitat de tons i semitons que hi ha entre elles.

Com podem saber quants tons i semitons hi ha entre dues notes? Doncs bé, la distància entre dues notes consecutives qualssevol de l'escala temperada és un semitò però les distàncies entre les notes naturals (les blanques del piano, anomenades naturals perquè en la nostra notació musical no duen cap alteració) no són sempre iguals.

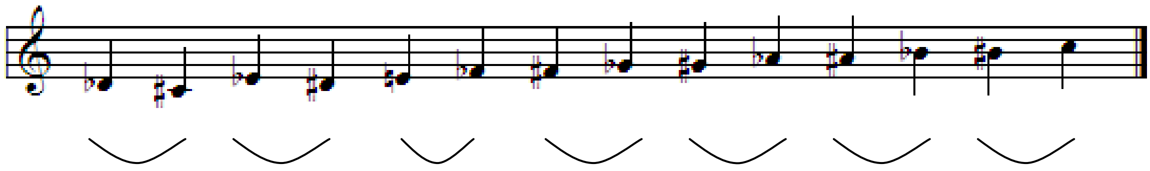


1to 1to 1semitò 1to 1to 1to 1semitò

A l'escala temperada un to és exactament dos semitons. Així, entremig de dues notes la distància entre les quals sigui d'un to n'hi podrem col·locar una altre gràcies a les alteracions. El bemoll serveix per rebaixar un semitò i el sostingut per apujar-lo. Al pentagrama inferior la distància entre cadascuna de les notes és d'un semitò.



Això fa que a la nostra escala temperada hi hagi notes que podem designar amb diferents noms. Són els anomenats enharmònics: la mateixa nota té més d’un nom i més d’una representació al pentagrama. Tot seguit mostrarem algunes parelles d’enharmònics:



Reb/Do# Mib/Re# Mi/Fab Fa#/Solb Sol#/Lab La#/Sib Si#/Do

Resumint, per a determinar l’ interval entre dues notes cal tenir en compte tant la quantitat de notes naturals que hi ha entre elles com la quantitat de tons. Els intervals més elementals de l’escala temperada són els següents:

- 2a menor: 1 semitò
- 2a Major: 1 to
- 3a menor: 1 to i ½
- 3a Major: 2 tons
- 4a justa: 2 tons i ½
- 4a augmentada o 5a disminuïda: 3 tons (tritò)
- 5a justa: 3 tons i ½
- 6a menor: 4 tons
- 6a Major: 4 tons i ½
- 7a menor: 5 tons
- 7a Major: 5 tons i ½
- 8a justa: 6 tons

1.2.2 Tonalitat

La tonalitat és un conjunt de notes organitzades al voltant d’una nota central anomenada tònica. La tònica és la nota que dóna nom a la tonalitat. Així doncs, si la nota central és un Do direm que ens trobem en tonalitat de Do. Però com podem parlar d’una nota central si totes les notes, en un principi, són igual d’importants?

Evidentment, una nota per sí mateixa no pot ser pas més important que una altra. Ara bé, quan tenim un conjunt de notes – com en el cas d'una tonalitat – s'estableixen relacions entre aquestes notes. Aquestes relacions estan exclusivament determinades per les distàncies entre elles i són aquestes distàncies les que fan que hi hagi notes que tinguin tendència a anar a parar a unes altres, que creïn tensions... Cadascuna de les notes que pertanyen a una tonalitat té una funció tonal que ve determinada per la relació que aquesta ha establert amb la tònica, d'aquesta manera cadascuna de les notes que formen la tonalitat té un paper concret assignat. Quan ens volem referir a la funció tonal d'una nota utilitzem nombres romans del I al VII, assignant a la tònica el valor I i així successivament a la resta de les notes.

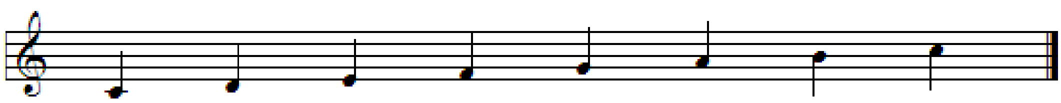
1.2.3 Escales i modes

Una tonalitat té diversos modes. Els modes són cadascuna de les maneres particulars de distribuir les distàncies entre les notes de l'escala. Quan s'estableix el sistema tonal, l'ús de diferents modes es redueix pràcticament a dos: el mode major i el mode menor.

La tonalitat pot utilitzar les dotze notes de l'escala temperada. Ara bé, les escales o modes concrets (escala major, escala menor natural, etc.) només es limiten a set d'aquestes notes. La tonalitat permet combinar les diferents escales utilitzant així totes dotze notes.

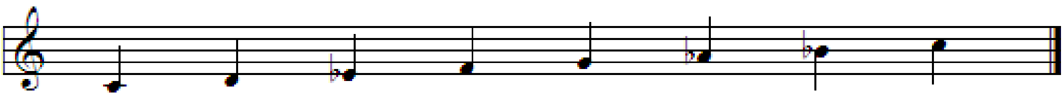
Els pentagrames següents mostren les escales de Do Major i do menor (natural) de la tonalitat de Do.

Do Major



I II III **IV** **V** VI VII VIII

do menor



I II III **IV** **V** VI VII I

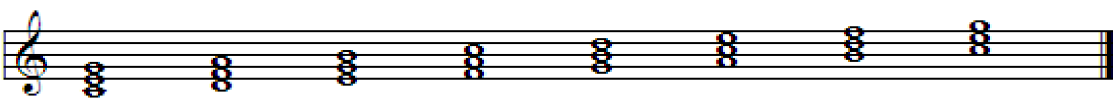
Els graus[5] més importants de tots dos modes són l'I, el IV i el V, que exerceixen les funcions tonals de tònica, subdominant i dominant respectivament i que, com podem veure a l'exemple anterior, són les mateixes notes independentment del mode en el que ens trobem. La resta dels graus de l'escala tindran funcions equivalents a aquestes tres que hem mencionat amb alguna característica pròpia.

El sol (V) es troba a un interval de quinta ascendent de do (I) i el fa (IV), està a una quinta descendent: la quinta és un interval clau al nostre sistema tonal.

1.3 L'escala major

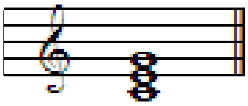
En aquest apartat intentarem analitzar l'estructura interna de l'escala major basant-nos en els intervals entre les notes que la configuren. Posarem sempre com a exemple l'escala de Do Major, però cal tenir en compte que l'elecció de la tònica no té cap mena de rellevància sinó que tot el que direm pot ser aplicat a qualsevol escala major.

L'harmonia de la música tonal es basa en acords, és a dir, conjunts de notes que sonen al mateix temps. L'acord bàsic és l'acord tríade que col·loca sobre una fonamental dues notes a intervals de tercera. Al següent pentagrama tenim els acords tríades que es poden construir utilitzant com a fonamentals les notes de l'escala de Do Major.



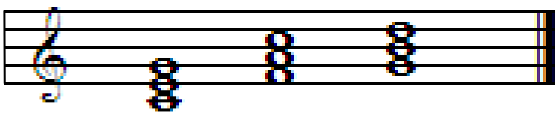
[5] Nota de l'escala en relació a la tònica. La tònica és I i a partir d' ella es numera la resta.

Segons la distribució de les distàncies entre les notes de l'acord podem distingir diferents tipus d'acords.



L'acord tríade format a partir de do s'anomena acord major. És l'acord principal de la tonalitat de la seva fonamental[6] i és molt agradable a l'orella. La primera tercera de l'acord és major (do – mi: 2 tons) i és per aquest motiu que rep el nom d'acord major. En canvi, la segona tercera (mi –sol: 1 to i ½) és menor. Com podem observar, l' interval que es dóna entre la fonamental de l'acord i la nota més aguda (do – sol: 3 tons i ½) és una quinta.

En una escala major trobem tres acords majors que, evidentment, tenen les característiques que hem explicat abans. Són els acords tríades construïts sobre els tres graus principals de l'escala: I, IV i V.
En el cas de Do Major, corresponen a les següents notes:



I IV V

Amb els tres acords anteriors obtenim totes les notes de l'escala. És clar que si agaféssim qualsevol altra nota de partida enlloc de do i seguíssim el mateix procediment obtindríem igualment totes les notes de l'escala major que comença per la nota en qüestió.

Així doncs, podem afirmar que una escala major està formada per tres acords tríades majors: el que es construeix sobre la tònica, el que es construeix sobre la quinta ascendent respecte la tònica (V, funció de dominant) i el construït sobre la quinta descendent (IV, funció de subdominant).

[6] La fonamental d'un acord és la nota més greu quan aquest està en estat directe (ordenat per terceres). A l'exemple, la fonamental de l'acord és el Do.

2. L'ESCALA PITAGÒRICA

La història ha atribuït a Pitàgores la primera teoria matemàtica de les notes musicals. Si més no, el que segur és cert és que la teoria pitagòrica ha estat la base de més de dos mil anys de música al món occidental.

És ben sabut que la nota emesa per una corda vibrant depèn de la longitud d'aquesta. Així doncs, una corda més curta emetrà un so més agut que una corda de les mateixes característiques (gruix, material, etc.) però més llarga. Pitàgores va observar que la consonància[1] entre dos sons, si ens imaginem els dos sons com a productes de dues cordes de diferent llargada, depèn de la relació entre aquestes llargades. Així doncs, per a Pitàgores les relacions que produïen intervals més agradables a l'orella eren ½ i 2/3, que corresponen a l'octava i la quinta, respectivament, de la nota original.

Per exemple, si nosaltres agafem una corda d'una llargada determinada que emeti un do ens trobarem que la corda que mesuri la meitat de la llargada de la corda inicial emetrà un do de l'octava superior. En canvi, si la segona corda mesurés 2/3 de la llargada inicial, la nota resultant seria un sol, o sigui, un interval de quinta.

És per aquest motiu que l'escala pitagòrica està formada per sèries de quintes reduïdes a l'octava fonamental.

2.1 Teoria de Fourier

Un cop sabem que l'octava i la quinta (dit d'una altra manera, el so emès per una corda que tingui la meitat de la llargada de la corda inicial i una que mesuri dos terços de la llargada de la corda inicial) són els intervals més consonants, ens cal preguntar-nos el motiu. És una casualitat?

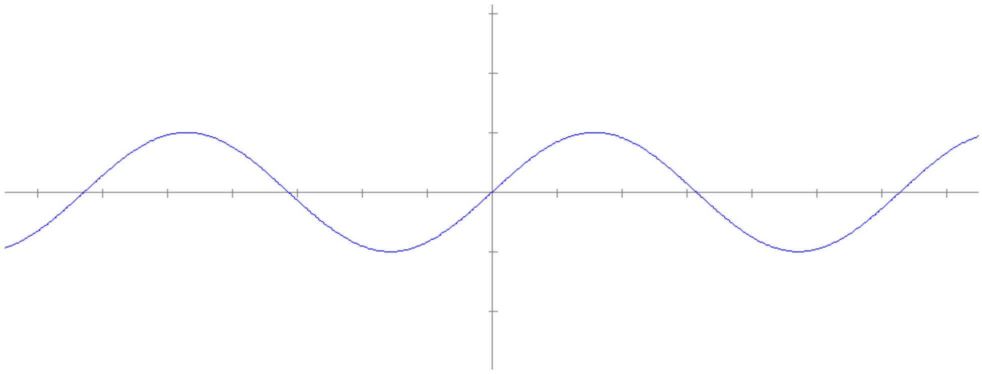
Evidentment, no. La resposta rau en la mateixa manera en que està constituït el so.

[1] El terme consonància és bastant ambigu. Considerem que un interval és consonant quan és agradable a l'orella.

Un so que es mantingui constant (que no variïn els seus paràmetres: intensitat, altura, etc.) és una ona periòdica, és a dir, una ona que cada cert temps (un període) repeteix exactament el mateix moviment.

Un so emès per una ona sinusoïdal pura es pot representar de la següent manera:

y = sin x



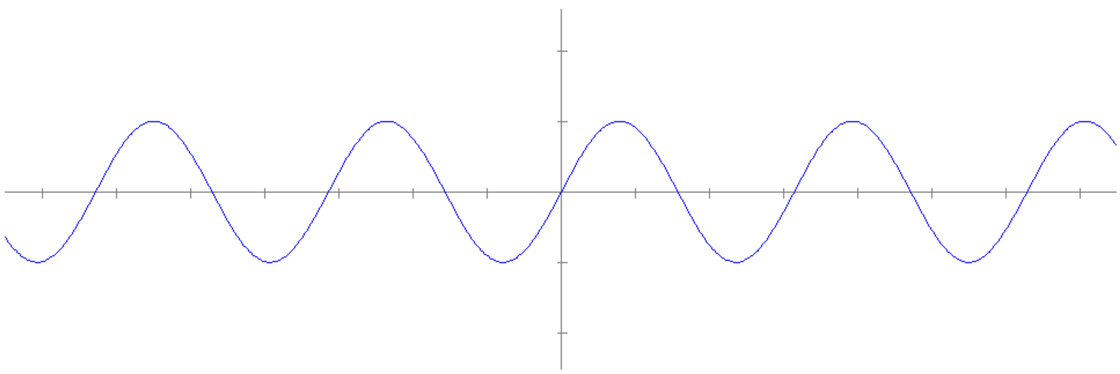
Aquest so que hem representat té una freqüència concreta, diguem-li u, i, com qualsevol moviment ondulatori, es pot representar amb l'expressió sin(2πut). Així, en el cas anterior, x= 2πut.

$$T = \frac{1}{u}$$

La freqüència té una relació directa amb el període: el període és l' invers de la freqüència, per tant, en aquest cas el període serà l' invers de u.

Si dupliquem la freqüència anterior (estaríem parlant d'un so una octava més amunt) l'ona obtinguda es representa de la següent manera:

y = sin 2x



Com que hem duplicat la freqüència respecte l'ona anterior, ara la freqüència serà 2u. Llavors y=sin(2π2ut) i, per tant, y=sin 2x.

Com podem observar, si tenim en compte que l'escala dels gràfics és la mateixa, al duplicar la freqüència el període passa a ser la meitat: hi ha més cicles per segon (freqüència més alta) i, per tant, el temps que es tarda a fer un cicle és més curt (període més baix).

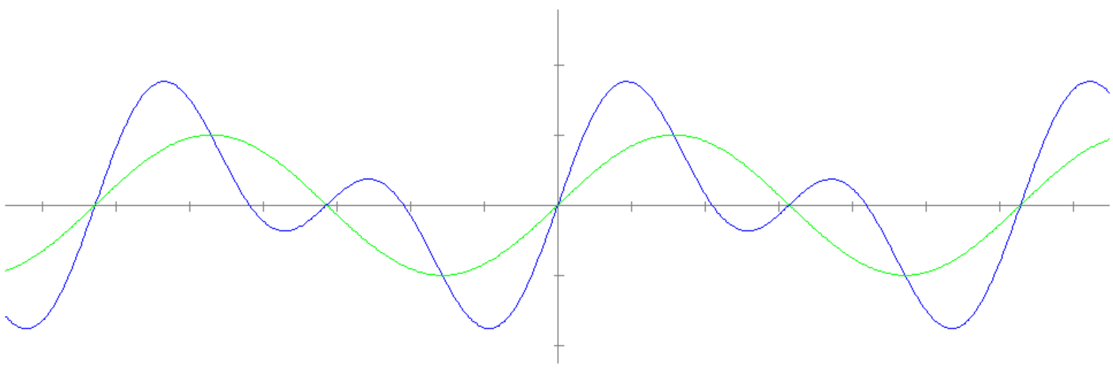
Ara bé, els sons que emeten els instruments musicals no es poden representar amb una única ona sinusoïdal sinó que es tracten d'ones periòdiques molt més complexes.

La teoria de Fourier ens diu que qualsevol ona periòdica pot descompondre's en una suma, que pot ser finita o infinita, d'ones sinusoïdals. Les freqüències de les ones que apareixen en aquesta suma són els múltiples enters de la freqüència de l'ona sinusoïdal fonamental de l'ona periòdica.

Així, si la freqüència fonamental és u les freqüències de la resta d'ones sinusoïdals que intervindran a l'ona periòdica seran 2u, 3u, 4u, 5u, 6u, 7u, 8u, 9u...

Per il·lustrar la idea de manera clara posarem un exemple molt senzill: sumem una ona representada per la funció y= sin x, que agafarem com a ona fonamental, amb la que la duplica en freqüència, representada per la funció y = sin 2x. La funció resultant de la suma està representada en blau.

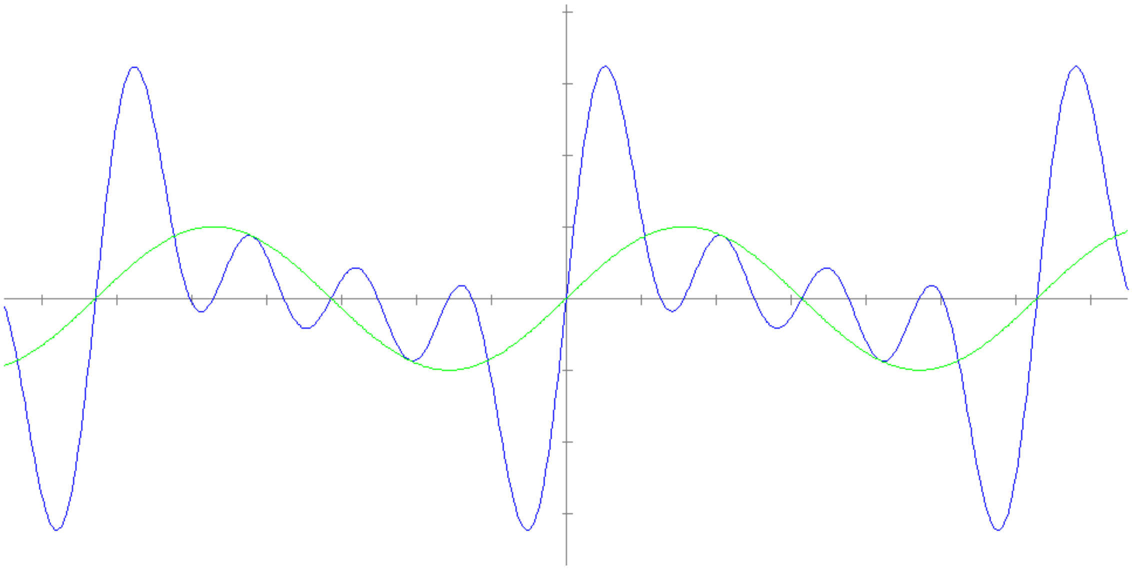
y = sin x + sin 2x



A simple vista, podem veure que el període de l'ona resultant coincideix amb el de l'ona fonamental (y= sin x, traçada en verd) i que, per tant, l'ona resultant i l'ona fonamental tenen la mateixa freqüència.

Observem què passa quan sumem més ones sinusoïdals:

$$y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$



Tot i que ara l'ona és molt més complexa, el període continua sent el mateix que el de l'ona fonamental (y= sin x, en verd) i, evidentment, la freqüència, la que determina l'altura del so, també.

La nota que capta la nostra oïda ve donada per la freqüència de l'ona periòdica que és, tal com hem demostrat abans, la freqüència de l'ona fonamental (u). Així, quan diem que els instruments s'afinen a La = 440 Hz ens referim únicament a la seva freqüència fonamental. Totes les altres freqüències (nu, donant a n valors enters positius) s'anomenaran harmònics de la freqüència fonamental.

Una corda vibrant produeix el so fonamental i, alhora, tots els seus harmònics però, això sí, amb una intensitat més baixa que la del so fonamental. La intensitat de l'harmònic va disminuint a mesura que la seva freqüència té un coeficient més elevat (a mesura que s'allunya de la freqüència fonamental) i la nostra oïda només és capaç de captar els primers harmònics.

Les diferents intensitats dels harmònics provoquen les diferències de timbre entre instruments. Així, si representéssim amb una funció l'ona produïda per un clarinet i per una flauta tocant un La=440Hz, veuríem que el gràfic de l'ona no és el mateix, ja que el pes dels diferents harmònics a l'ona resultant és característic de cada instrument. Ara bé, tant si es tracta d'una flauta com d'un clarinet, la freqüència i el període de les ones seran exactament els mateixos. Si no fos així, dos instruments diferents no podrien tocar mai la mateixa nota.

Per tant, quan en música parlem d'octaves ens estem referint al primer harmònic natural de qualsevol so i quan parlem de quintes, al segon. La primera nota ja inclou la segona en la seva descomposició.

2.2 Distància entre dos sons

En aquest treball ens serà indispensable poder calcular la distància entre dos sons, és a dir, la diferència entre l'altura d'aquests dos. Per tant, haurem de trobar un mètode que ens sigui pràctic per a poder comparar altures de sons.

La magnitud amb la que mesurem l'altura d'una nota és la freqüència (el nombre de vibracions per segon que fa l'ona que produeix aquell so), en Hertz (1Hz=1vibració/segon), però aquesta magnitud té un inconvenient per als nostres propòsits. Per a la nostra orella la distància entre un do i un re greu i un do i un re més aguts és exactament la mateixa. Per entendre'ns: quan algú toca totes les tecles del piano de manera consecutiva, tant les blanques com les negres, notem que la distància entre dues notes seguides és sempre la mateixa, és a dir, la nostra oïda percep un creixement lineal.

En canvi, la freqüència té un creixement exponencial, la qual cosa vol dir que a mesura que les notes es van fent més agudes (augmenta el número de vibracions per segon), la diferència en Hertz d'una nota a la seva consecutiva va augmentant també. L'augment de les vibracions per segon de les ones que transmeten un so no és proporcional a l'augment d'altura de la nostra percepció auditiva. Això implica que no podrem comparar distàncies entre dues parelles de notes sumant i restant si la seva altura ens ve donada per la seva freqüència.

Direm que la distància entre un do i un re és igual a la distància entre un sol i un la perquè la relació entre les seves freqüències és la següent:

$f_{re}/f_{do} = f_{la}/f_{sol}$ Si el creixement fos aritmètic trobaríem les distàncies a partir de les diferències però com que és geomètric ho hem de fer a partir dels quocients.

Ara bé, el concepte matemàtic de distància implica que la distància entre un valor i ell mateix sigui 0. Si calculem la distància de la mateixa manera que hem fet anteriorment passarà el següent:

$f_{do}/f_{do} = 1$, ja que el quocient entre un valor i ell mateix és sempre 1. Això entra en contradicció amb el que hem exposat abans.

Per a poder determinar la distància entre dues notes de manera que la distància entre una nota i ella mateixa sigui 0 utilitzarem una escala logarítmica, és a dir, enlloc de basar-nos en les freqüències treballarem amb el seu logaritme, és a dir, amb els exponents de les freqüències. Així passem d'un creixement exponencial (freqüències) a un creixement lineal (exponents). Les propietats dels logaritmes ens permetran trobar les distàncies a partir del quocient de les freqüències.

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

Així doncs, anomenem a dues notes u i v, essent aquests els valors de les seves freqüències, i determinem la distància entre elles de la manera següent:

$d(u, v) = k\,|\log (v/u)|$

k és una constant que ve determinada per la unitat de mesura que hem escollit com a referent. L'elecció de l' unitat de mesura és completament arbitrària. Ara bé, és recomanable prendre com a referència una unitat amb un cert sentit. Per exemple, podríem agafar un to com a unitat de referència, o sigui, la distància que hi ha entre un do i un re. Llavors la constant k seria la següent:

$d(do, re) = 1 \Rightarrow 1 = k\,|\log (re/do)| \Rightarrow k = 1/|\log (re/do)|$

Quan utilitzem el nom d'una nota en una fórmula ens referim únicament al valor numèric de la seva freqüència. Així, en l'expressió de dalt hem de substituir do i re per les seves respectives freqüències.

Si ho fem d'aquesta manera, la distància entre qualsevol nota i ella mateixa és 0:

$d(u, u) = k\,|\log(u/u)| = k \log 1 = k \cdot 0 = 0$

En molts casos, en comptes d'associar les notes a la seva freqüència (valor absolut), donat que el què necessitem són distàncies relatives, les relacionarem amb fraccions (valor relatiu). Treballar amb fraccions és equivalent a agafar com a freqüència base o fonamental la freqüència 1 ($u=1$). Com hem dit abans, el so emès per una corda que tingui per longitud ½ d'una altra corda sonarà una octava més agut i això vol dir que tindrà exactament el doble de freqüència. De la mateixa manera, el so provocat per una corda que tingui per longitud 2/3 tindrà 3/2 vegades la freqüència del so original.

L'avantatge de treballar amb les raons entre freqüències és que, d'aquesta manera, se'ns permet treballar amb casos generals que podran ser aplicats a qualsevol freqüència que utilitzem com a punt de partida.

2.3 L'escala musical i el conflicte pitagòric (*)

2.3.1 Definició matemàtica d'escala musical

L'escala musical està formada per uns sons determinats que corresponen només a unes freqüències concretes de tot el ventall de freqüències existents. Ara bé, l'elecció d'aquestes freqüències no és fruit de l'atzar sinó que respon a uns motius raonats. Ara definirem matemàticament el concepte d'escala musical.

(*) Les idees i conceptes matemàtics que apareixen en aquest apartat s'han agafat de l'article *Les matemàtiques i les escales musicals* de Joan Girbau. Bibliografia: pàg.68.

Per començar identificarem els sons amb el conjunt dels nombres reals positius:

{freqüències en Hertz} = R^+

Anomenarem E al conjunt format per les freqüències que pertanyen a l'escala musical i serà un subconjunt numerable de freqüències del conjunt de totes les freqüències existents: $E \subset R^+$.

Tot seguit enumerarem els axiomes que ha de complir E per tal que sigui una escala musical:

A) Hi ha una bijecció entre E i el conjunt Z dels enters.

Aquesta afirmació ens diu que els elements de l'escala musical (els elements de E) actuen com els nombres enters de manera que són il·limitats cap amunt i cap avall però conserven sempre l'ordre. Així com la quantitat de nombres enters que podem trobar entre dos nombres enters és limitada, la quantitat de notes musicals d'una escala que podem trobar entre dues notes de la mateixa també ho serà.

B) Si u pertany a E, 2u i u/2 també.

$u \in E \Rightarrow 2u \in E \, , \, u/2 \in E$

Aquesta afirmació ens diu que si una nota pertany a l'escala també ho farà la mateixa nota una octava més amunt i una octava més avall.

Dues notes porten el mateix nom - les considerem equivalents - quan estan a distància d'octava o de múltiples d'octava. Serà una nota equivalent quan la freqüència resultant sigui el producte de la freqüència inicial per potències de dos, sempre que l'exponent (q) de la potència sigui enter. Aquest exponent q ens indica en quantes octaves hem modificat el so inicial: si és positiu haurem pujat d'octava el so inicial (serà més agut) mentre que si l'exponent és negatiu l'haurem baixat d'octava (obtindrem un so més greu).

Per tant, direm que les freqüències u i v són equivalents si podem passar de l' una a l'altra multiplicant per potències de dos amb l'exponent enter:

si $u = 2^q v$, llavors u i v són equivalents.

Quan nosaltres analitzem una escala ens interessen les distàncies entre les notes que es troben a la mateixa octava[2]. Per aquest motiu quan treballem amb les diferents notes de l'escala sempre les reduirem a la mateixa octava, que anomenarem l'octava fonamental. D'aquesta manera, totes les freqüències amb les quals treballem es trobaran entre u (freqüència que hem agafat com a base) i 2u (la seva octava). Per a trobar el representant de qualsevol fracció de u a l' interval [u, 2u] cal fer el següent:

Anomenem x a qualsevol fracció de la freqüència u i x'u el representant d'aquesta a l' interval [u, 2u].

$x'u = \frac{x}{2^q}u \Rightarrow x' = \frac{x}{2^q}$ de manera que q sigui el màxim enter positiu pel qual es compleixi que $x > 2^q$.

Si q és el màxim enter positiu pel qual es compleix l' inequació anterior, necessàriament es complirà el següent:

$2^{q+1} > x > 2^q$ i, per tant, $2 > \frac{x}{2^q} > 1$,

demostrant així que si $x' = \frac{x}{2^q}$ la freqüència obtinguda $x'u \in [u, 2u]$.

Quan dividim una freqüència per dos estem rebaixant aquella nota una octava i, si ho fem per potències de dos, ho estarem fent tantes octaves com indiqui l'exponent. Per tant, l'únic que estem fent quan utilitzem la fórmula anterior és canviar d'octava la nota inicial.

2.3.2 L'axioma de Pitàgores

Totes les escales musicals compleixen els axiomes que hem mencionat a l'apartat anterior i el què les diferencia és la quantitat de notes que podem

[2] Notes compreses entre una nota i la següent del mateix nom (explicat a l'apartat anterior).

trobar entre dues notes equivalents i la distribució de les distàncies entre elles. Ara afegirem la proposició pitagòrica que limita el concepte d'escala:

C) Si $u \in E$, $3u \in E$.

Pitàgores va considerar que una escala, a part de contenir les octaves, hauria de contenir les quintes de cada nota ja que l' interval més consonant és la distància d'octava i, seguidament, la quinta.

Tal i com hem vist a l' inici de l'apartat, podem afirmar que els harmònics que es troben més presents en una freqüència qualsevol són aquells que doblen i tripliquen la freqüència fonamental. També sabem que doblar la freqüència comporta pujar una octava. I doncs, què comportarà triplicar una freqüència?

Primer de tot ho reduirem a l'octava fonamental de la manera que hem explicat abans.

$\frac{3u}{2} = \frac{3}{2}u$ de manera que $1 < \frac{3}{2} < 2$ i, per tant, $\frac{3}{2}u \in [u,2u]$

I així veiem, com hem mencionat anteriorment, que es tracta d'un interval de quinta, el segon interval més consonant.

Si incloem a l'escala les freqüències 2u i 3u l'escala haurà de contenir forçosament totes les potències de 2 i de 3 de cadascuna de les freqüències pertanyents a l'escala.

Si $u \in E \Rightarrow 2^n u \wedge 3^n u \in E$, $n \in Z$

En termes musicals es traduiria en que cada nota de l'escala ha de tenir, dins la mateixa escala, la seva quinta i octava naturals (procedents dels harmònics). Així, si $u \in E$ llavors 2u i 3u hi pertanyeran i, com a conseqüència, també formaran part de l'escala 4u, 6u, 8u, 9u, 12u, etc.

Això últim voldrà dir que l'escala ideal segons Pitàgores inclouria 2u, 3u i 4u, és a dir, que cadascuna de les notes de l'escala tindria dins la pròpia escala els seus tres primers harmònics, cosa que li conferiria una consonància increïble.
Cal remarcar, però, que a l'època pitagòrica no es coneixia la teoria dels harmònics, tot i així els hi era possible observar que quan tenien dues cordes tal que una fos el triple de llarga que l'altra, la més curta es posava a vibrar lleugerament quan feien vibrar la llarga.

2.3.3 Incompatibilitat de l'axioma de Pitàgores

Quan vulguem procedir a l'elaboració d'una escala seguint les tres regles o axiomes que hem definit abans apareixeran les dificultats. Resulta que és completament impossible ja que les proposicions A, B i C són incompatibles. Si pretenem fer una escala que compleixi B i C hi haurà infinites notes en una octava pertanyents a l'escala i, per tant, com que no complirà A no ho podrem considerar escala.

A) Bijecció f entre el conjunt dels enters Z i E.
B) $u \in E \Rightarrow 2u \in E$, $u/2 \in E$
C) $u \in E \Rightarrow 3u \in E$

Si E c R^+ que compleix B i C no pot complir A.

Aquí en segueix la demostració:

Establim una funció f que a cada q hi fa correspondre un valor f(q) de manera que sigui el màxim enter positiu tal que $2^{f(q)} < 3^{q}$. Així doncs, com que no podem donar un valor més gran a f(q) si volem que es continuï complint la inequació anterior, s'haurà de complir que $2^{f(q)} < 3^{q} < 2^{f(q)+1}$.

De l'afirmació $2^{f(q)} < 3^{q} < 2^{f(q)+1}$ deduïm que $1 < \frac{3^q}{2^{f(q)}} < 2$

i, si $u \in E$ (és a dir, que u és una freqüència corresponent a una nota que pertany a l'escala) tindrem que $u < \frac{3^q}{2^{f(q)}} u < 2u$.

El que hem fet és considerar que $2^{f(q)}$ és la freqüència inicial i, per tant, diem que es troba en l'octava fonamental o octava zero. L'exponent q indica l'octava on es troba la freqüència.

En canvi, $2^{f(q)+1}$ correspondrà a l'octava superior de la freqüència anterior i ja sabem que augmentar en una octava significa doblar la freqüència inicial. Hem de trobar un representant de la freqüència 3^q a l' interval $[1,2]$. Per tant, dividim per $2^{f(q)}$ per canviar la nota d'octava tantes vegades com calgui per situar-la a l' interval $[1,2]$, és a dir, a l'octava fonamental.

$u, \ \frac{3^q}{2^{f(q)}}u, \ 2u \in E$ Aquestes tres notes pertanyen a l'escala en funció de les proposicions B i C i el mateix succeirà per a qualsevol enter positiu q.

Si agafem un altre valor per q, diguem-li q', tindrem el següent:

$$1 < \frac{3^q}{2^{f(q)}} < 2 \quad ; \quad 1 < \frac{3^{q'}}{2^{f(q')}} < 2$$

i, com que q ≠ q', sabem que

$$\frac{3^q}{2^{f(q)}} \neq \frac{3^{q'}}{2^{f(q')}}$$

ja que si suposem que, essent q ≠ q', la igualtat anterior fos certa, és a dir, que $\frac{3^q}{2^{f(q)}} = \frac{3^{q'}}{2^{f(q')}}$ tindríem el següent:

$$\frac{3^q}{2^{f(q)}} = \frac{3^{q'}}{2^{f(q')}} \Rightarrow \frac{3^q}{3^{q'}} = \frac{2^{f(q)}}{2^{f(q')}} \Rightarrow 3^{q-q'} = 2^{f(q)-f(q')} \Rightarrow 3^r = 2^s$$

si $r = q - q'$

i $s = f(q) - f(q')$

Així ens quedaria que $3^r = 2^s$ i això només pot ser cert si r=s=0, que implicaria que q = q'.

Així doncs, per a cada valor diferent de q obtindrem una nota distinta.

Per tant, queda demostrat que si fem que 3u pertanyi a l'escala existiran infinites notes que pertanyin a l'escala entre u i 2u, una per cada possible valor de q. Per aquest motiu hi ha una contradicció amb la proposició A que ens diu que entre una nota de l'escala i una altra només hi ha un nombre limitat de notes que pertanyin a la mateixa.

Hem arribat a la conclusió que és impossible construir una escala musical que contingui els dos primers harmònics de cada nota, és a dir, que contingui la octava i la quinta naturals de cadascuna de les notes que hi pertanyen.

2.4 Construcció d'una escala pitagòrica

Com que ja hem vist que no podrem incloure les quintes de cadascuna de les notes intentarem fer-hi una aproximació.

Abans de procedir a la construcció de l'escala definirem matemàticament què és una escala pitagòrica.

2.4.1 Definició d'escala pitagòrica

u: freqüència a partir de la qual construïm l'escala, en serà la fonamental. La seva elecció no té importància perquè si donem un altre valor a u ens sortirà una escala equivalent, simplement estarà transportada[3].

A: nombre positiu menor que la distància entre u i la seva octava.
$A < d(u, 2u)$ Determina el grau d'espessor de l'escala, és a dir, la quantitat de notes que hi haurà entre u i 2u.

Norma d'E : màxima distància entre dues notes consecutives de E.

[3] El transport en música equivaldria a la translació en matemàtiques.

Una escala pitagòrica associada a u i a A és de la forma E = < u, 3u, 3^2u, 3^3u, ... , 3^q u >, de manera que q és el menor enter positiu tal que la màxima distància entre dues notes consecutives (norma de E) sigui igual o menor que A.

Com podem veure, les escales pitagòriques es construeixen a partir de sèries de quintes que es redueixen a la octava fonamental. Totes aquestes notes, al multiplicar-les o dividir-les per dos, formaran les octaves superiors i inferiors.

Després d'aquesta definició veiem que hi ha infinitat d'escales pitagòriques i que és l'elecció de A el què les caracteritza. En comptes d'escollir un valor a l'atzar intentarem fer-ne una elecció més o menys lògica i natural.

2.4.2 L'escala pitagòrica de set notes

Per comoditat a l'hora de treballar amb els nombres i donat que no varien les distàncies entre notes treballarem suposant que u = 1. Abans d'escollir un valor per a A mirem com queden distribuïdes les distàncies en una escala de tres notes.

E = < u, 3u, 9u > i com que u = 1, E = < 1, 3, 9 >
Ens cal reduir el 3 i el 9 a l' interval [1,2]:
$3 \rightarrow 3/2$
$9 \rightarrow 9/2^3 = 9/8$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & < & 9/8 & < & 3/2 & < & 2 \\ & 9/8 & & 4/3 & & 4/3 & \end{array}$$

Per a fer un càlcul de les distàncies relatives entre les notes (sense determinar una unitat de referència), com en el cas anterior, tan sols cal dividir les fraccions.

$$\frac{9}{8} : 1 = \frac{9}{8} \quad ; \quad \frac{3}{2} : \frac{9}{8} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \quad ; \quad 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

Si volem agafar una unitat de referència el més coherent és agafar com a unitat de mesura la distància més petita: 9/8.

$k = 1/\ |\log 9/8| \approx 19.54937806...$

Les distàncies queden distribuïdes dins l'escala de la següent manera:

$d(1, 9/8) = 1$

$d(9/8, 3/2) = d\ (3/2, 2) \approx 2.442474596...$

$d(1, 2) \approx 5.884949192...$

Agafarem $A = 1$, de manera que la màxima distància que hi haurà entre dues notes consecutives de l'escala que crearem serà la que hi ha entre les dues primeres notes de l'escala de tres notes.

Tot seguit procedirem a la construcció d'aquesta escala. A priori no podem saber quantes notes ha d'incloure per tal que la seva norma sigui igual o menor que 1. Així sent, anirem afegint notes fins que això es compleixi.

4 notes: $E = < 1, 3, 3^2, 3^3 >$

Els representants d'aquestes notes a l' interval [1, 2] són els següents:

$1 < 3^2/2^3 < 3/2 < 3^3/2^4 < 2$ i, per tant, $1 < 9/8 < 3/2 < 27/16 < 2$

$d(1, 9/8) = 1$

$d(9/8, 3/2) \approx 2.44$

$d(3/2, 27/16) = 1$

$d(27/16, 2) \approx 1.44$

La norma d'aquesta escala és 2.44 i $2.44 > A$.

5 notes: $E = < 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4 >$

$1 < 3^2/2^3 < 3^4/2^6 < 3/2 < 3^3/2^4 < 2$ i, per tant,

$1 < 9/8 < 81/64 < 3/2 < 27/16 < 2$

$d(1, 9/8) = 1$

$d(9/8, 81/64) = 1$

$d(81/64, 3/2) \approx 1.44$

$d(3/2, 27/16) = 1$

$d(27/16, 2) \approx 1.44$

La norma d'aquesta escala és 1.44 i $1.44 > A$.

Cal destacar, però, que aquesta és una escala molt utilitzada, l'anomenada escala pentatònica, que correspondria, per exemple, a les notes negres del piano.

6 notes: $E = < 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 >$

$1 < 3^2/2^3 < 3^4/2^5 < 3/2 < 3^3/2^4 < 3^5/2^7 < 2$ i, per tant,

$1 < 9/8 < 81/64 < 3/2 < 27/16 < 243/128< 2$

$d(1, 9/8) = 1$

$d(9/8, 81/64) = 1$

$d(81/64, 3/2) \approx 1.44$

$d(3/2, 27/16) = 1$

$d(27/16, 243/128) =1$

$d(243/128, 2) \approx 0.44$

La norma de l'escala anterior segueix sent 1.44.

7 notes: $E = < 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6 >$

$1 < 3^2/2^3 < 3^4/2^5 < 3^6/2^8 < 3/2 < 3^3/2^4 < 3^5/2^7 < 2$ i, per tant,

$1 < 9/8 < 81/64 < 729/512 < 3/2 < 27/16 < 243/128 < 2$

$d(1, 9/8) = 1$

$d(9/8, 81/64) = 1$

$d(81/64, 729/512) = 1$

$d(729/512, 3/2) \approx 0.44$

$d(3/2, 27/16) = 1$

$d(27/16, 243/128) =1$

$d(243/128, 2) \approx 0.44$

Ara ja tenim l'escala pitagòrica per A = 1. Aquesta escala és l'anomenada escala natural de 7 notes i és la que trobaríem aproximadament tocant les tecles blanques d'un piano començant pel fa.

2.4.3 L'escala pitagòrica de dotze notes

Si enlloc d'agafar A=1, agafem un valor molt proper a 1, com ara A=0.9 ens sortirà l'escala pitagòrica de dotze notes, que és anomenada escala cromàtica, i correspon aproximadament a l'escala que tocaríem amb el piano a partir d'un fa utilitzant, aquesta vegada sí, tant les tecles blanques com les negres. D'aquesta manera, les distàncies entre les notes es distribueixen segons el patró següent:

fa – fa# - sol – sol# - la – la# - si – do – do# - re – re# - mi – fa

0.56 0.44 0.56 0.44 0.56 0.44 0.44 0.56 0.44 0.56 0.44 0.44

3. L'ESCALA TEMPERADA

Una escala temperada és aquella que està construïda de manera que la distància entre dues notes consecutives és sempre la mateixa.

El temperament igual apareix a principis del s. XVII, o potser abans, però no és fins al s. XVIII que comença a guanyar adeptes gràcies a cèlebres compositors com J.S. Bach. Actualment, és el sistema acceptat internacionalment.

Aquest sistema d'afinació no apareix per casualitat sinó que és fruit de la necessitat musical. Al llarg de la història han existit una gran varietat d'escales que distribuïen de diferent manera els intervals entre les notes i, com a conseqüència, els sistemes d'afinació dels instruments han estat molt diversos.

Ara bé, amb l'establiment del sistema tonal com a mètode per organitzar la música ens apareixen greus problemes a l'hora de escollir el criteri base el qual afinarem.

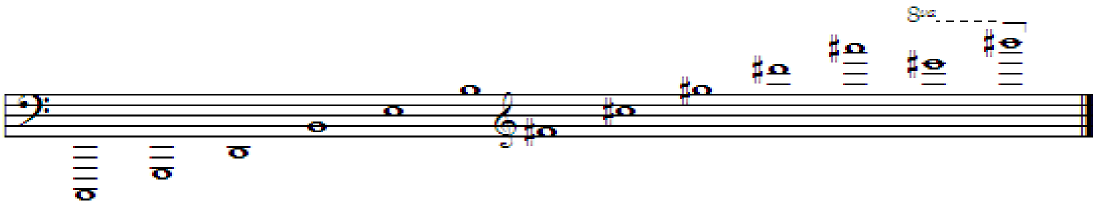
3.1 La necessitat de temperament

Resulta que si afinem els instruments d'afinació fixa (piano, orgue...) utilitzant els cicles de quintes naturals[1] (escala pitagòrica) obtindrem una tonalitat amb una afinació excel·lent: la que té per nom la nota utilitzada com a freqüència base. La resta de tonalitats ens presentaran més problemes ja que trobarem unes tonalitats acceptables - les més properes[2] a la tonalitat inicial - i unes tonalitats impracticables - aquelles que es trobin a més de dues o tres quintes de distància - . A què és degut?

[1] Quan parlem de quintes naturals ens referim a les notes que són exactament el triple de la freqüència inicial, és a dir, el segon harmònic de qualsevol so.

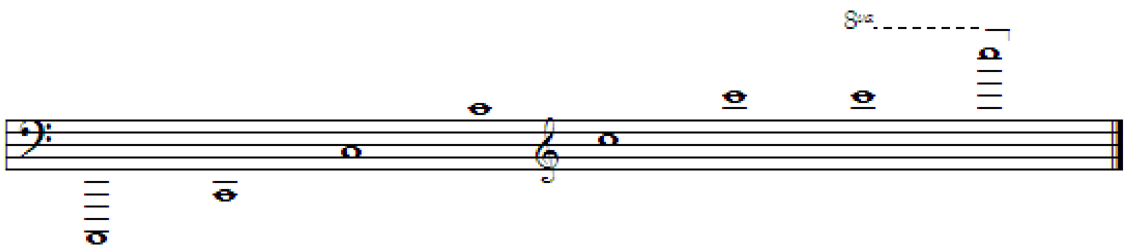
[2] Com que les notes de cada tonalitat s'obtenen a partir de sèries de quintes segons l'escala pitagòrica, les tonalitats més properes són les que es troben a una quinta de distància ja que tindran més notes en comú. En el cas de la tonalitat de Do Major, les tonalitats que li són més properes seran Sol Major (quinta ascendent) i Fa Major (quinta descendent).

Si comencem a fer cicles de quintes a partir de do obtindrem el següent:



$$1 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1} \left(\frac{3}{2}\right)^{2} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{5} \left(\frac{3}{2}\right)^{6} \left(\frac{3}{2}\right)^{7} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{8} \left(\frac{3}{2}\right)^{9} \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \left(\frac{3}{2}\right)^{11} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$$

El dotzè so que obtindrem, $(3/2)^{12}$, correspon a un si#. Tal com hem mencionat anteriorment una nota és enharmònica d'una altra quan té diferent nom però correspon a la mateixa freqüència sonora. Per exemple, en l'escala actual el fa# i el solb són enharmònics, com també ho són el si# i el do. Si tenim en compte això últim, el si# que ens apareix com a última nota del pentagrama anterior hauria de ser igual en freqüència a l'últim do del pentagrama de la pàgina següent:



$$1 \qquad 2^{1} \qquad 2^{2} \qquad 2^{3} \qquad 2^{4} \qquad 2^{5} \qquad 2^{6} \qquad 2^{7}$$

Doncs bé, si calculem la freqüència del si# a partir de quintes successives des de do i la del do a partir de pujar octaves (7 octaves en aquest cas) des del do original ens trobarem una sorpresa:

Si# $\rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129.746$

Do $\rightarrow 2^{7} = 128$

Hi ha una diferència significativa i ens trobem que el si# és més agut que el do. El problema rau en que 7 octaves no corresponen a 12 quintes físiques i, per tant, les notes obtingudes a partir de pujar o baixar octaves (multiplicar o dividir per potències de 2) i les que obtinguem a partir de pujar i baixar quintes (multiplicar o dividir per potències de 3/2) no tindran exactament la mateixa freqüència. La diferència és prou gran com per ser perfectament perceptible.

A més, també hem pogut veure que, si les freqüències dels enharmònics no coincideixen, el cicle de quintes (12 quintes que es repeteixen successivament) es converteix en una sèrie infinita de quintes on van apareixent successives petites variacions de freqüències que donen pas a un nombre infinit de notes. Aquesta és també una demostració de la impossibilitat de construir escales pitagòriques ideals.

Si nosaltres afinem un piano per quintes partint de do, podrem tocar impecablement una peça en Do Major. També ens en sortirem prou bé quan toquem una peça en Sol Major (tonalitat que es troba a una quinta ascendent) o en Fa Major (una quinta descendent) perquè l'error és, tot i perceptible, acceptable. Ara bé, la dificultat arribarà quan vulguem tocar una peça en Fa# Major, que es troba a sis quintes ascendents de do, on l'error acumulat serà tan gran que els intervals bàsics com ara la tercera o la quinta sonaran completament desafinats.

Amb l'arribada del sistema tonal apareix també la necessitat de modulació i transport. El sistema tonal juga amb les diferents tonalitats dins una mateixa peça. La modulació consisteix precisament en canviar de tonalitat dins d'una mateixa peça. És evident que si només hi ha una tonalitat ben afinada això no és possible, doncs hauríem d'afinar de nou el piano cada cop que canviéssim de tonalitat. El transport seria equivalent a una translació: consisteix en tocar una mateixa peça començant per una altra nota mantenint intactes les distàncies entre les notes.

Per a poder realitzar ambdues coses necessitem un sistema d'afinació on totes les tonalitats sonin bé, que mantinguin de la manera més exacte possible els seus intervals característics.

3.2 Construcció d'una escala temperada

La característica que distingeix l'escala igualment temperada és, sens dubte, que la distància entre dues notes consecutives és sempre la mateixa. Aquest fet és molt important per al transport i la modulació ja que ens permetrà tocar qualsevol tonalitat de manera que les distàncies relatives entre els graus de l'escala seran els mateixos independentment de l'elecció d'aquesta.

La construcció d'una escala temperada de n notes és molt senzilla. En aquest apartat en farem primer la construcció en un cas general de n notes i després posarem com a exemple l'escala temperada de 12 notes, la més estesa en la música occidental.

Primer de tot cal aclarir que quan parlem d'una escala de n notes aquest nombre n es refereix a la quantitat de notes que hi ha des d'una nota de freqüència concreta fins a la que la dobla en freqüència, comptant només una d'aquestes dues. Per simplificar-ho, si considerem que totes les notes que estan a distància d'octava reben el mateix nom, el nombre n de notes es referirà a la quantitat de notes de diferent nom.

Per a que totes les distàncies entre dues notes consecutives de l'escala siguin iguals caldrà que el producte de qualsevol d'aquestes distàncies per ella mateixa n vegades sigui igual a la distància entre una nota i la seva octava. Si prenem com a freqüència base u, la freqüència corresponent a la mateixa nota però una octava més alta serà 2u. I, per tant, estarem buscant una distància que elevada a n sigui igual a 2.

$d^n = 2 \Rightarrow d = \sqrt[n]{2}$, de manera que les notes d'aquesta escala correspondran a les següents freqüències:
$u,\ 2^{1/n}u,\ 2^{2/n}u,\ 2^{3/n}u,\ \ldots,\ 2^{(n-1)/n}u$

Tot seguit aplicarem el cas general per a construir l'escala temperada de dotze notes.

3.2.1 L'escala temperada de dotze notes

Aquesta és l'escala que tots coneixem des de ben petits, la que trobarem en qualsevol teclat.

És una aproximació bastant bona a l'escala pitagòrica cromàtica en la qual la distància entre notes consecutives és sempre la mateixa. Seguidament veurem la diferència entre ambdues escales.

Recordem que per a calcular una distància, com ja hem dit al punt anterior, cal fer el següent:

$d(1, 2^{1/n}) = k\ |\log (2^{1/n} /1)|$

El primer pas serà determinar una unitat de referència que ens permeti aïllar la constant k. Si agaféssim com a unitat 9/8 , un to pitagòric, obtindríem que la distància:

$d(u, 9/8u) = 1$, per tant, $k = \dfrac{1}{|\log(9/8)|} \approx 19.5437806$

$d(u, 2^{1/12}u) = k\ |\log (2^{1/12})| \approx 0.490272015$

Aquí hem pogut veure que un semitò en l'escala temperada correspon a una miqueta menys (és impossible percebre auditivament la diferència) de la meitat d'un to pitagòric.

A la pàgina següent podem veure una taula amb les freqüències d'una escala temperada de dotze notes a partir de la nota de freqüència 220 Hz (La_2).

Producte de f_0 per...	Freqüència(Hz)	Nom de la nota
$f_0=1$	220	La_2
$2^{1/12}$	233.0818808	La_2#
$2^{2/12}$	246.9416506	Si_2
$2^{3/12}$	261.6255653	Do_3
$2^{4/12}$	277.182631	Do_3#
$2^{5/12}$	293.6647679	Re_3
$2^{6/12}$	311.1269837	Re_3#
$2^{7/12}$	329.6275569	Mi_3
$2^{8/12}$	349.2282314	Fa_3
$2^{9/12}$	369.9944227	Fa_3#
$2^{10/12}$	391.995436	Sol_3
$2^{11/12}$	415.3046976	Sol_3#
2	440	La_3

3.3 Desviació pitagòrica d'una escala temperada

Després de tota l'explicació podem comprendre perfectament que en l'escala temperada no hi apareix la quinta natural, és a dir, la nota que correspon a la freqüència que triplica la freqüència inicial.

· Si E és una escala temperada que conté una freqüència u, llavors el triple d'aquesta freqüència u no pertanyerà a E.

$$\text{si } u \in E \rightarrow 3u \notin E$$

Com que la quinta és el segon interval més consonant que es pot donar entre dues notes podríem considerar que una bona escala temperada seria aquella en que la distància entre 3u i la nota de l'escala que més s'aproxima a aquest valor fos mínima. A més, a efectes pràctics i, referint-nos a la sonoritat, una distància prou petita és totalment imperceptible.

La distància mínima entre 3u i una nota pertanyent a l'escala E s'anomena desviació pitagòrica de E, simbolitzada per DP(E). El seu càlcul ens permetrà veure quines escales temperades són més perfectes, entenent el concepte de perfecció com una aproximació òptima a la quinta natural, és a dir, a 3u, i comparar-les entre elles.

Tot seguit procedirem a calcular la desviació pitagòrica en un cas general d'una escala temperada de n notes. Per a aquest propòsit, una unitat de referència adequada ens pot facilitar la feina. Per tant, considerarem que la distància entre u i 2u és log 2.

Si d(u, 2u) = log 2 i d(u, 2u) = k |log (2u/u)| ,

tenim que $k = \dfrac{\log 2}{|\log(2u/u)|} = \dfrac{\log 2}{\log 2} = 1$

El fet que la constant k sigui igual a 1 fa que la distància entre dues notes equivalgui al valor absolut del logaritme del quocient de les dues notes:

d(u, v) = k |log (v/u)|= 1|log (v/u)| = |log (v/u)| ,
essent v una freqüència qualsevol.

Així ens trobem que d(u, 3u) = log 3, d(u, 4u) = log 4 ...

Quan parlem d'una escala temperada de n notes sabem que aquella escala té n notes des d'una freqüència concreta fins que apareix el doble d'aquesta freqüència. Per tant, la distància entre dues notes consecutives qualssevol de l'escala serà el quocient de log 2 entre el número de notes que hi ha a l'escala.

d(u,2u) = log 2

$$d\left(1, 2^{\frac{1}{n}}\right) = d\left(2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}\right) = d\left(2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}\right) = d\left(2^{\frac{n-1}{n}}, 2\right) = \frac{\log 2}{n}$$

Les distàncies entre les notes quedaran distribuïdes de la següent manera:

$$\ldots, -\frac{\log 2}{n},\ 0,\ \frac{\log 2}{n},\ \frac{2\log 2}{n},\ \frac{3\log 2}{n},\ldots,\frac{(n-1)\log 2}{n},\ \log 2,\ \ldots$$

El zero representa la freqüència base ja que és necessari que així sigui la distància entre ella i ella mateixa. És ben clar que 3u, que vindria representat per log 3, no és a l'escala. Tanmateix, ens interessa que a l'escala hi hagi una nota que s'aproximi al màxim a log 3, o sigui, que la distància entre aquesta nota pertanyent a l'escala i el log 3 sigui mínima.

$$d\left(2^{\frac{m}{n}},3\right) = \text{mínim}$$

Si en una escala temperada qualsevol de n notes, m és el valor enter positiu que fa que la distància sigui mínima, podrem trobar aquesta distància de la següent manera gràcies a les propietats dels logaritmes:

$$d\left(2^{\frac{m}{n}},3\right) = \left|\log\frac{2^{\frac{m}{n}}}{3}\right| = \left|\frac{m}{n}\log 2 - \log 3\right|$$

La diferència (evidentment en valor absolut perquè estem parlant de distàncies) entre log 3 i la nota de l'escala que li és més propera s'anomena desviació pitagòrica de l'escala en qüestió. L'expressarem tal i com està escrita a continuació:

$$DP\ (E_n) = \left|\frac{m\log 2}{n} - \log 3\right|$$

Cal tenir en compte que la desviació pitagòrica es refereix a l' interval de quinta, que equival al triple de la freqüència base i és el segon harmònic en l'anàlisi de Fourier. Això ens pot conduir a pensar que també podríem calcular desviacions per altres intervals, com ara la tercera (5u) o la setena (7u).

Per exemple, si utilitzem la mateixa unitat de distància obtindríem el següent:

Si k=1 llavors d(u,5u)= log 5 i d(u,7u)= log 7.

desviació de la tercera (5u) = $\left|\frac{m\log 2}{n} - \log 5\right|$

desviació de la setena (7u) = $\left|\frac{m\log 2}{n} - \log 7\right|$

S'ha de remarcar que, utilitzant el mateix mètode, podem calcular la desviació de les notes de l'escala en relació a qualsevol harmònic físic. Ara bé, l'elecció de 5u i 7u (el quart i el sisè harmònic de u)no és fortuïta. Aquests són els primers harmònics de cada so després de l'octava i la quinta i, com a conseqüència, són els que tenen més presència al so fonamental. Així una escala que inclogui els primers harmònics de cada nota permetrà uns acords més consonants i, en principi, també més agradables a l'orella.

SEGONA PART

4. RECERCA DE L' ESCALA IDEAL

4.1 Criteris

En aquest apartat ens dedicarem a la recerca d'una escala ideal. Per poder-la dur a terme necessitem uns criteris que ens permetin determinar què és una bona escala. Així doncs, tenint en compte tot allò explicat fins ara, farem una llista de les propietats d'una escala ideal:

1.- **Escala temperada**, és a dir, que la distància entre dues notes consecutives qualssevol sigui sempre la mateixa. La nostra música, és a dir, la música tonal, demana una escala temperada que permeti tocar amb totes les tonalitats de manera que aquestes mantinguin els seus intervals característics.

2.- Ha de tenir una **bona aproximació als primers harmònics** de cadascuna de les notes. Pel fet de ser temperada, si té una bona aproximació als harmònics d'una nota concreta també la tindrà, forçosament, a totes i cadascuna de les notes de l'escala.

La mateixa definició d'escala li exigeix que contingui les octaves de totes les notes, és a dir, el doble de la seva freqüència. Com que cada nota exigeix tenir la seva octava a l'escala, si una freqüència pertany a l'escala totes les potències de dos de la freqüència també hi pertanyeran:
Essent u una freqüència qualsevol i E una escala musical,
si $u \in E \Rightarrow 2u \in E \Rightarrow 2^n u \in E, \forall n \in Z$

A la introducció musical hem demostrat que una escala major està formada per tres acords tríades majors les fonamentals dels quals es troben a intervals de quinta.

Exemple: Si ens trobem en Do Major les fonamentals dels tres acords seran do, fa (quinta descendent respecte do) i sol (quinta ascendent, també respecte do). Els acords construïts sobre aquestes tres notes seran:

- do/ mi (tercera)/ sol (quinta)

- fa/ la (tercera)/ do (quinta)
- sol/ si(tercera)/ re (quinta)

Així, veiem que els dos intervals que apareixen són la quinta i la tercera, amb aquest ordre d'importància.

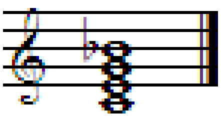
Al llarg del treball també hem pogut observar que la quinta i la tercera corresponen als dos primers harmònics diferents de l'octava (3u i 5u respectivament) de qualsevol so de freqüència u.

La taula següent ens mostra les equivalències de les primeres freqüències de la sèrie d'harmònics als intervals musicals:

Freqüència	u	2u	3u	4u	5u	6u	7u	8u
Interval	-	octava	quinta	octava	tercera	octava	setena	octava
Nota[1]	do_1	do_2	sol_2	do_3	mi_3	sol_3	sib_3	do_4

Per tant, una escala ideal haurà de tenir una molt bona aproximació a la quinta (3u), ja que és el segon harmònic de qualsevol so i, no pas de manera casual, l' interval més rellevant del sistema tonal. Entendrem que l'aproximació és molt bona quan la nostra oïda no pugui percebre'n la diferència. L'aproximació a la tercera (5u) també haurà de ser bona, perquè és el següent harmònic diferent de l'octava i el considerem l' interval més important després de la quinta.

La setena (7u) és el següent harmònic diferent que apareix a la sèrie d'harmònics. No és d'estranyar, doncs, que, si l'acord tríade bàsic utilitzava la tercera i la quinta, l'acord més comú de quatre notes utilitzi els intervals



de tercera, quinta i setena. Aquest acord de quatre notes s'anomena acord de setena de dominant perquè és el que es dóna sobre el V (dominant) a l'escala major.
Així intentarem també que l'escala tingui una bona aproximació a la setena.

[1] L'elecció de do com a freqüència fonamental no té cap importància, es podria haver fet el mateix a partir de la resta de notes. El subíndex de les notes indica l'octava on es troben, considerant que la primera nota es troba a l'octava 1 que, per tant, serà l'octava fonamental.

Per tant, l'escala ideal contindrà (com a mínim a efectes pràctics, és a dir, que pel que fa a l'oïda o bé no hi hauria cap diferència o bé aquesta seria mínima) els sis primers harmònics de u (2u, 3u, 4u, 5u, 6u, 7u) i totes les seves potències que tinguin per base un nombre primer ($2^n u, 3^n u, 5^n u, 7^n u$).

Cal tenir en compte que no tots els harmònics tenen el mateix pes i que, per tant, és més important l'aproximació a la quinta que a la tercera i, de la mateixa manera, és més important la de la tercera que la de la setena. Resumint, com més propera és la freqüència de l'harmònic a la freqüència fonamental més gran és la necessitat d'una bona aproximació.

3.- **No** ha de tenir un **nombre desorbitat de notes**. Tot i que analitzarem les escales des d'un punt de vista totalment teòric i treballarem amb distàncies més petites de les que estem habituats (menys d'un semitò), només compararem i construirem escales que tinguin un nombre de notes que ens permeti notar la diferència entre dues notes consecutives.

4.2 Comparació d'escales temperades

La comparació de diferents escales temperades, ja que així ho exigeixen els criteris de l'apartat anterior es durà a terme des de dos punts de vista: el teòric i la percepció auditiva.

4.2.1 Estudi de les desviacions

Segons els criteris exposats anteriorment, la qualitat d'una escala rau en les seves aproximacions a la quinta (3u), a la tercera (5u) i a la setena (7u), per aquest ordre d'importància. Així, podem fer una comparació de les diferents escales temperades a partir d'un estudi de les seves aproximacions als harmònics citats.

L'estudi de les aproximacions als harmònics de cada escala el realitzarem a partir de les desviacions de l'harmònic en qüestió respecte la nota de l'escala que més se li apropi.

desviació de la quinta (3u) = $\left|\frac{m\log 2}{n} - \log 3\right|$,

desviació de la tercera (5u) = $\left|\frac{m\log 2}{n} - \log 5\right|$ i

desviació de la setena (7u) = $\left|\frac{m\log 2}{n} - \log 7\right|$, essent n el nombre de notes de l'escala i m el nombre enter positiu que fa la diferència mínima.

Si aquests càlculs els haguéssim de fer a mà o amb la calculadora seria una feina mecànica llarga i pesada. Per aquest motiu hem creat un petit programa d'ordinador amb el Microsoft Excel que ens calcula les tres desviacions per cadascuna de les escales temperades de 1 a 65536 notes. Els resultats obtinguts, que tot seguit resumirem en unes taules, són ben curiosos.

Les taules de la pàgina següent mostren les millores que apareixen a les desviacions. Començant per l'escala de menys notes, l'escala d'una única nota, ens indica les escales on trobem una millora a la desviació respecte les escales anteriors. Així, si la desviació és igual de bona, no surt registrada a la taula.

- La primera columna indica el nombre de notes de l'escala temperada (correspon al valor de n utilitzat a la fórmula de la desviació).

- La columna del mig ens indica la desviació respecte l'harmònic en qüestió. El valor absolut de la desviació no és rellevant, ja que per comparar treballem amb valors relatius, sinó que l' important és la variació de les desviacions. Tot i així, cal recordar que la unitat de referència agafada l'hem determinat a partir de d(u, 2u)=log2.

- La columna de la dreta indica la nota de l'escala més propera a l'harmònic, és a dir, el valor de m que fa la diferència mínima. Aquest valor és necessàriament més gran que n per poder aproximar-se al màxim a log 3, log 5 o log 7. En el cas de la quinta, m pertany a la segona octava i, en el cas de la tercera i de la setena, m pertany a la tercera octava (es pot veure clarament als subíndexs de la taula d'equivalències entre freqüències i intervals).

DESVIACIONS ÒPTIMES DE LA QUINTA		
Nombre de notes	Desviació	Quinta
1	0,12493874	2
2	0,02557626	3
3	0,0245954	5
5	0,00452674	8
7	0,00407412	11
12	**0,00049043**	**19**
29	0,0003746	46
41	0,00012142	65
53	1,7111E-05	84
200	1,1288E-05	317
253	5,3392E-06	401
306	1,4508E-06	485
359	1,2894E-06	569
665	2,8509E-08	1054
4655	2,8509E-08	7378
8286	2,6122E-08	13133
8951	2,2063E-08	14187
9616	1,8566E-08	15241
10281	1,5521E-08	16295
10946	1,2846E-08	17349
11611	1,0477E-08	18403
12276	8,3656E-09	19457
12941	6,4707E-09	20511
13606	4,761E-09	21565
14271	3,2107E-09	22619
14936	1,7984E-09	23673
15601	5,0649E-10	24727
31867	9,9009E-11	50508

DESVIACIONS ÒPTIMES DE LA TERCERA		
Nombre de notes	Desviació	Tercera
1	0,09691001	2
2	0,05360498	5
3	0,00343332	7
16	0,00283814	37
19	0,00184791	44
22	0,00112774	51
25	0,00058041	58
28	0,00015037	65
59	3,185E-05	137
87	2,6796E-05	202
146	3,0966E-06	339
351	2,7776E-06	815
497	1,052E-06	1154
643	1,1001E-07	1493
2718	6,2233E-08	6311
3361	2,928E-08	7804
4004	6,9114E-09	9297
8651	1,7792E-09	20087
12655	9,7052E-10	29384
21306	1,4595E-10	49471
55267	1,097E-10	128326

DESVIACIONS ÒPTIMES DE LA SETENA		
Nombre de notes	Desviació	Setena
1	0,05799195	3
3	0,04235138	8
4	0,01726555	11
5	0,00221405	14
15	0,00221405	42
16	0,00154882	45
21	0,0006529	59
26	0,00010156	73
57	0,00010156	160
83	3,7932E-05	233
109	4,6577E-06	306
353	3,1659E-06	991
462	1,3201E-06	1297
571	1,7899E-07	1603
1713	1,7899E-07	4809
1822	1,1036E-07	5115
2393	4,1322E-08	6718
2964	1,1193E-09	8321
8892	1,1193E-09	24963
46853	1,0483E-09	131533
49817	9,1936E-10	139854
52781	8,0487E-10	148175
55745	7,0256E-10	156496
58709	6,1058E-10	164817
61673	5,2744E-10	173138
64637	4,5193E-10	181459

Comentari dels resultats de les taules de desviacions

Com acabem de veure, les taules no contenen un gran nombre d'escales i, tenint en compte que mostren totes les millores existents fins a l'escala de 65536, podríem dir que són poquíssimes les escales que representen una millora respecte les anteriors. En el cas de la quinta trobem 28 escales que suposen una millora; en el de la tercera, 21, i en el de la setena, 26. Aquest resultat és sorprenent perquè inicialment podríem pensar que la millora de la desviació hauria de ser proporcional, o si més no, anar estretament lligada al nombre de notes de l'escala. A més, l'aparició de millores no sembla respondre, almenys aparentment, a cap patró.

En el cas de les desviacions de la quinta hi ha una escala que crida l'atenció. L'escala de 665 fa un salt espectacular a la millora de la desviació, que passa de tenir exponent -6 a exponent -8. Una millora d'aquesta magnitud no es dóna a cap altra escala de les taules.

També podem apreciar que la quinta és la que aconsegueix la millor desviació, d'exponent -11, a l'escala de 31867 notes. La segueix la tercera amb una desviació d'exponent -10 a l'escala de 55267 i, acabar, la setena, amb una desviació, també d'exponent -10, més alta a l'escala de 64673.

No crec que tingui cap relació el fet d'aconseguir una millor desviació amb el fet de ser un harmònic més proper a la fonamental. Així, en aquest cas ha estat pura coincidència que la millor desviació l'aconseguís la quinta, seguida de la tercera i la setena. Si, per exemple, ens fixéssim només en l'escales de 1 a 200 notes, resulta que és la tercera qui obté una millor desviació, seguida de la setena i, per últim, la quinta.

4.2.2 Desviació total d'una escala

Una vegada hem obtingut les desviacions respecte cadascun dels harmònics, el següent pas consisteix en fer una comparació on tinguem en compte que no tots els harmònics són igual d'importants. Tal i com hem dit abans, els harmònics tenen més pes com més propers són a la fonamental. Per tant, no ens interessaria, per exemple, una escala que tingués una desviació perfecta per a la setena però que, en canvi, la seva desviació de la quinta fos dolenta.

Així doncs, intentarem trobar la desviació total de l'escala, és a dir, un valor assignat a l'escala que ens permeti comparar les escales entre elles tenint en compte les desviacions dels tres harmònics estudiats.

Per poder fer això caldrà calcular una mitjana ponderada, o sigui, fer una mitjana de les tres desviacions de manera que el pes de cadascuna sigui diferent.

$$\text{dtotal} = \frac{p_1 \times \text{dquinta} + p_2 \times \text{dtercera} + p_3 \times \text{dsetena}}{p_1 + p_2 + p_3}$$

p_1, p_2 i p_3 són els factors pels quals multiplicarem cada desviació en funció del pes que vulguem donar a l'harmònic en qüestió i, per motius físics, sempre $p_1 > p_2 > p_3$. Per tant, segons quin pes atribuïm a cada harmònic podem obtenir diferents resultats, és a dir, diferents desviacions totals. Per expressar el pes que donem a cada harmònic ho farem de la següent manera: p_1, p_2, p_3.

Hem utilitzat quatre distribucions de pesos diferents a l'hora de puntuar les escales:

1) 4,2,1: La quinta val el doble de la tercera i aquesta última el doble de la setena.

2) 9,3,1: La quinta val el triple de la tercera i aquesta el triple de la setena.

3) 3,2,1: La quinta val el triple de la setena i la tercera el doble de la setena.

4) 1/3,1/5,1/7: Aquesta última proporció té una característica que la fa de caràcter general. Cada desviació és multiplicada per l' invers de la seva freqüència i, per tant, podria estendre's perfectament a més harmònics. Així, si volguéssim tenir en compte 11u i 13u, consideraríem que el seu pes a l'escala és de 1/11 i 1/13 respectivament.

Tot seguit veurem una taula on apareixen les millors escales, és a dir, de la mateixa manera que ho hem fet abans, les que ofereixen una millora en la desviació respecte les anteriors. Al costat del nombre de notes de l'escala apareix el valor de la desviació total segons la distribució dels pesos dels harmònics.

ESCALES ÒPTIMES I LES SEVES DESVIACIONS SEGONS LA DISTRIBUCIÓ DELS PESOS DE CADASCUN DELS HARMÒNICS							
4,2,1		9,3,1		3,2,1		1/3,1/5,1/7	
Escala	Desviació	Escala	Desviació	Escala	Desviació	Escala	Desviació
1	0,107366703	1	0,113320817	1	0,10443803	1	0,102504863
2	0,03821528	2	0,034537942	2	0,040321783	2	0,040714831
3	0,021085663	3	0,021077691	3	0,020500706	3	0,02208746
5	0,009617854	5	0,008727743	5	0,010466373	5	0,00965054
7	0,00758386	7	0,006489158	7	0,008168817	7	0,008399146
9	0,007311391	10	0,004827518	9	0,007054561	9	0,007260378
10	0,004789005	12	0,001733392	10	0,004832716	10	0,004651661
12	0,002378376	24	0,001495111	12	0,002693034	12	0,002909421
19	0,00233165	29	0,00139402	19	0,002418469	19	0,00257639
22	0,00181073	31	0,000966006	22	0,001814168	22	0,00190457
31	0,000837627	41	0,00047868	31	0,000760624	31	0,000756222
41	0,000593465	53	0,000185192	41	0,000672139	41	0,000649648
53	0,000281246	118	0,000105088	53	0,000325268	53	0,000365127
118	0,00014401	171	6,28457E-05	99	0,000302164	94	0,000342301
171	6,82663E-05			118	0,000157138	99	0,000295264
				171	7,12564E-05	118	0,000185962
						130	0,000175256
						140	0,000169524
						171	7,21453E-05

És evident que, usant diferents pesos, les desviacions totals que surten només poden ser comparades amb aquelles que hagin emprat el mateix criteri. Per tant, una altra vegada, no és el valor exacte de la desviació total l'important sinó la possibilitat de determinar quina escala s'apropa més als harmònics naturals.

A continuació, per comparar els resultats obtinguts amb les distintes distribucions, hem col·locat les escales de manera que les que apareixen en més d'una ocasió es trobin situades a la mateixa fila.

ESCALES ÒPTIMES SEGONS LA DISTRIBUCIÓ DELS PESOS DELS HARMÒNICS			
4,2,1	9,3,1	3,2,1	1/3,1/5,1/7
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
5	5	5	5
7	7	7	7
9		9	9
10	10	10	10
12	12	12	12
19		19	19
22		22	22
	24		
	29		
31	31	31	31
41	41	41	41
53	53	53	53
			94
		99	99
118	118	118	118
			130
			140
171	171	171	171

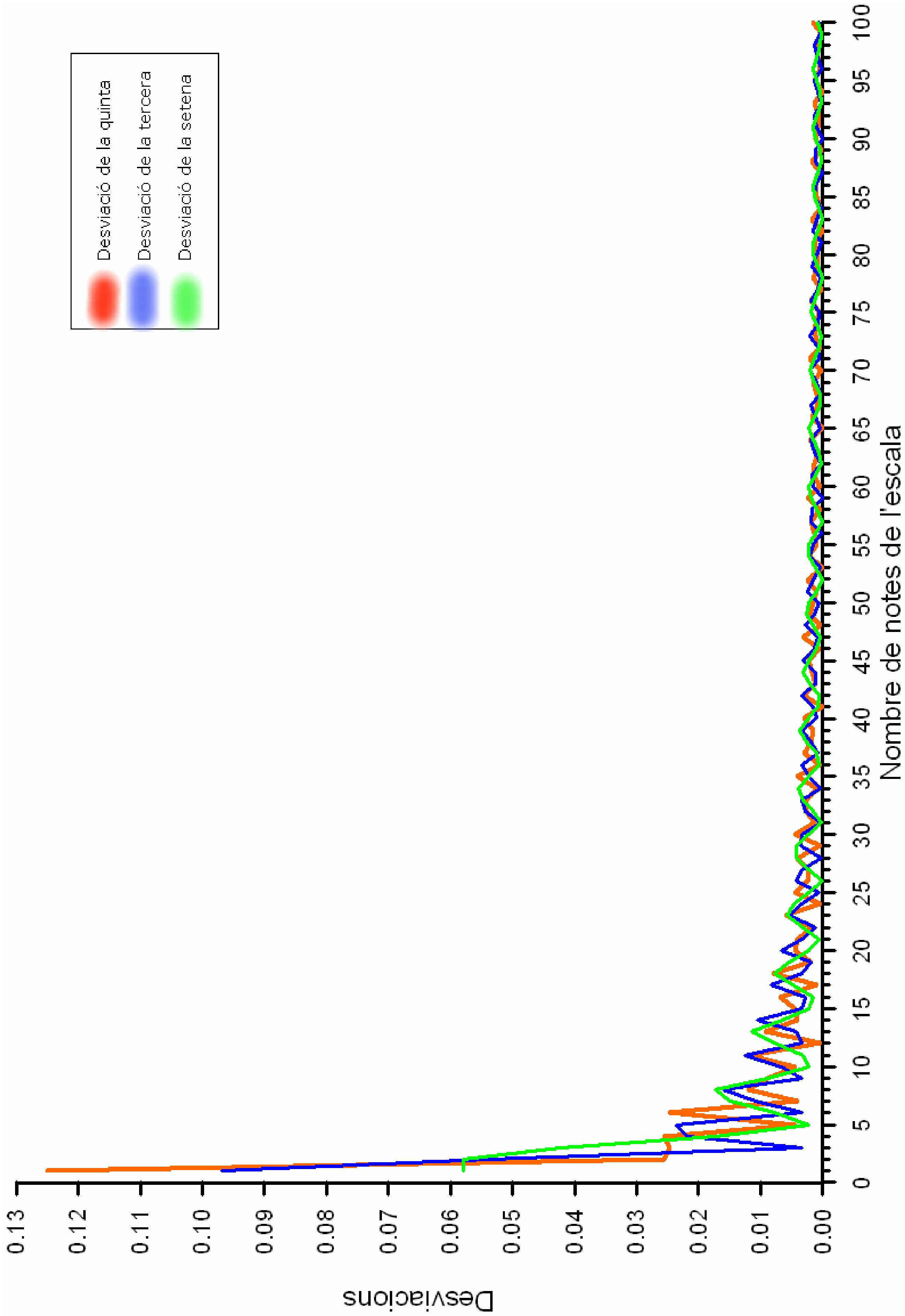
Comentari dels resultats de les taules

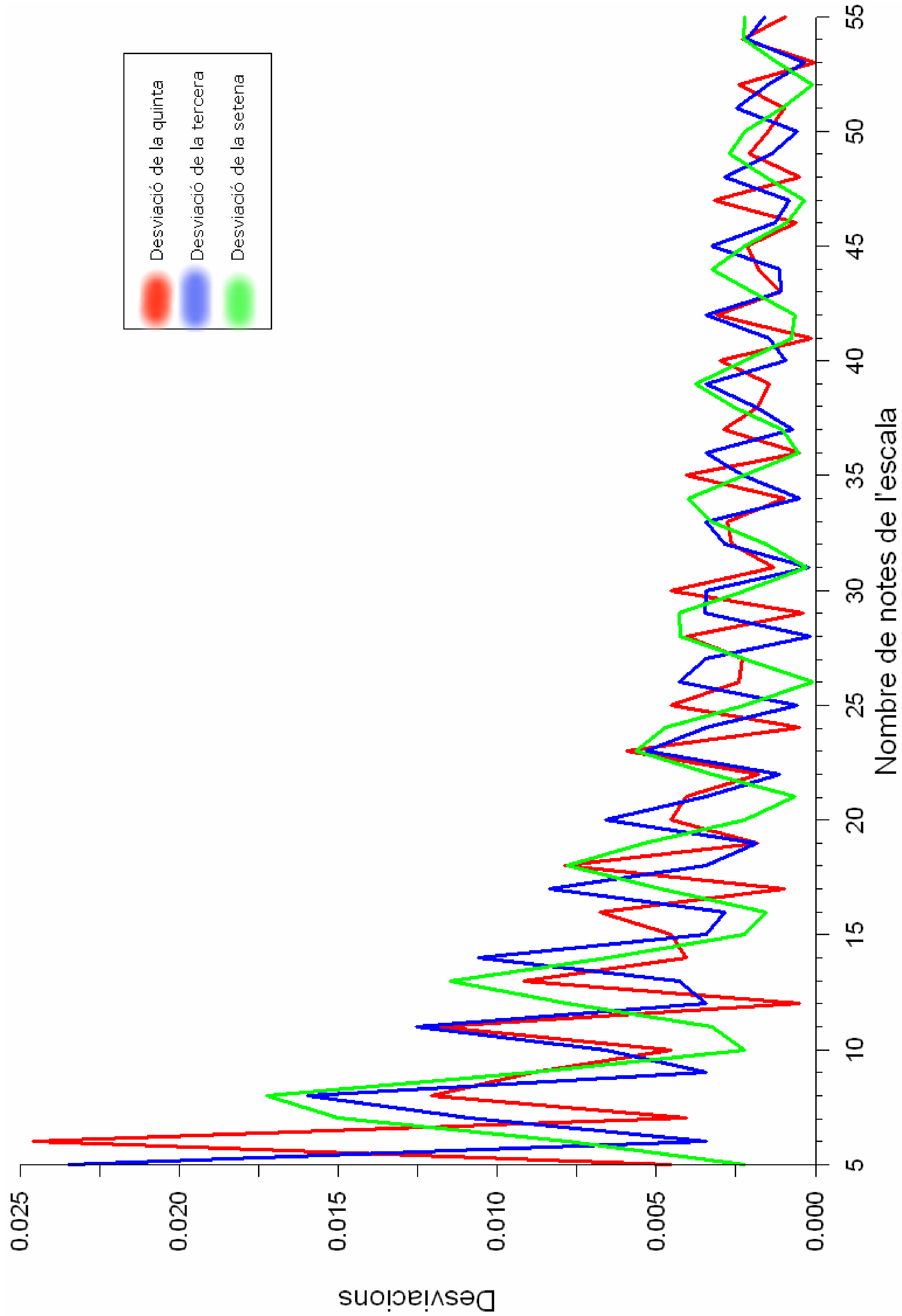
Cal destacar, sobretot, que les diferents distribucions dels pesos dels harmònics no fan canviar radicalment els resultats obtinguts. A simple vista observem que hi ha certes escales que apareixen a totes quatre columnes, o sigui, que utilitzant qualsevol de les quatre proporcions representen una millora respecte les escales anteriors. Aquest és el cas de les escales de 5, 7, 10, 12, 31, 41, 53, 118 i 171 notes. Les escales de 1, 2 i 3 notes també apareixen a totes quatre columnes, però es tracta d'escales tan escasses de notes que són fàcilment superades.

Caldria destacar potser el cas de l'escala de 29 notes. Al punt anterior, trobem que l'escala de 29 notes és la primera que representa una millora en la desviació de la quinta després de l'escala de 12 notes. En canvi, tot i que la quinta té un pes major que la resta d'harmònics en qualsevol distribució, l'escala de 29 notes només apareix a la segona columna, en la qual la quinta té un pes realment superior. Així, a l'escala de 29 notes, la millora de la quinta comporta un empitjorament a les desviacions respecte els altres dos harmònics.

Seguidament, com a resum dels resultats i per tal de veure de manera gràfica com es comporten totes tres desviacions a cada escala, elaborarem un gràfic on apareguin totes tres desviacions per a totes les escales de 1 a 100 notes. Tot seguit i per a poder observar els resultats amb més detall, elaborarem un segon gràfic que mostri les desviacions per a les escales de 5 a 55 notes.

Aquesta progressiva reducció del nombre d'escales a estudiar és degut a que busquem una escala que, encara que potser no sigui gaire pràctica, com a mínim en puguem percebre la distància entre notes consecutives.


Desviació de la quinta
Desviació de la tercera
Desviació de la setena
Nombre de notes de l'escala
Desviacions
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100
0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08 0.09 0.10 0.11 0.12 0.13


Desviació de la quinta
Desviació de la tercera
Desviació de la setena
Nombre de notes de l'escala
Desviacions
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55

4.2.3 Comparació auditiva

Finalitzarem la comparació de les diverses escales temperades possibles amb l'estudi auditiu de certes escales. Com que resultaria impossible dedicar-nos a escoltar totes les escales temperades existents, farem una tria d'acord amb el que hem anat veient fins ara.

Construirem totes aquelles escales de menys de 60 notes que apareixen utilitzant les quatre distribucions dels pesos dels harmònics a l'apartat anterior: les escales de 5, 7, 10, 12, 31, 41 i 53 notes.

Per començar farem la fitxa de desviacions de cadascuna i, més endavant, trobarem un comentari detallat per a cada una d'elles.

Escala 5 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	0,00452674
	Tercera	0,02350199
	Setena	0,00221405
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,00961785
	9,3,1	0,00872774
	3,2,1	0,01046637
	1/3,1/5,1/7	0,00965054

Escala 7 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	0,00407412
	Tercera	0,01090144
	Setena	0,01498766
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,00758386
	9,3,1	0,00648916
	3,2,1	0,00816882
	1/3,1/5,1/7	0,00839915

Escala 10 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	0,00452674
	Tercera	0,00660101
	Setena	0,00221405
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,004789
	9,3,1	0,00482752
	3,2,1	0,00483272
	1/3,1/5,1/7	0,00465166

Escala 12 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	0,00049043
	Tercera	0,00343332
	Setena	0,00782028
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,00237838
	9,3,1	0,00173339
	3,2,1	0,00269303
	1/3,1/5,1/7	0,00290942

Escala 31 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	0,00129965
	Tercera	0,00019644
	Setena	0,00027192
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,00083763
	9,3,1	0,00096601
	3,2,1	0,00076062
	1/3,1/5,1/7	0,00075622

Escala 41 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	0,00012142
	Tercera	0,00146148
	Setena	0,00074561
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,00059346
	9,3,1	0,00047868
	3,2,1	0,00067214
	1/3,1/5,1/7	0,00064965

Escala 53 notes

DESVIACIONS PARCIALS	Quinta	1,7111E-05
	Tercera	0,00035322
	Setena	0,00119383
DESVIACIONS TOTALS	4,2,1	0,00028125
	9,3,1	0,00018519
	3,2,1	0,00032527
	1/3,1/5,1/7	0,00036513

Totes les escales que sentirem començaran i finalitzaran amb la mateixa nota. Així, la nota de partida serà La_2 (220 Hz), el La sota el Do central del piano; i la seva octava, el La_3 (440 Hz), la freqüència a partir de la qual s'afina.

Per a poder escoltar les diferents escales cal reproduir el CD adjunt des de qualsevol programa d'audio de l'ordinador (Reproductor de Windows, etc.). Les notes estan editades des d'un generador de sons, el Cool Edit. El so no és bo ja que per obtenir el so d'un instrument mínimament real caldria un treball exhaustiu amb els harmònics de les freqüències[2], cosa que no és l'objectiu del treball.

Així doncs, al costat del nom de cada escala hi veurem la pista del CD on es troba i les freqüències de totes les seves notes utilitzant, tal com hem dit, 220 Hz com a freqüència base.

A la taula de freqüències, les notes corresponents a la quinta, la tercera i la setena hi apareixen destacades. Seguint els colors que hem emprat fins ara, la quinta és vermella; la tercera, blava, i la setena, verda. Potser caldria recordar, abans de procedir a la comparació, quines freqüències tindrien els harmònics naturals de la nota fonamental:

Quinta: $La_2 \times \frac{3}{2} = 220 \times \frac{3}{2} = 330$ Tercera: $La_2 \times \frac{5}{2^2} = 220 \times \frac{5}{4} = 275$

Setena: $La_2 \times \frac{7}{2^2} = 220 \times \frac{7}{4} = 385$

[2] Anteriorment ja hem explicat que el timbre d'un instrument ve donat per les diferents presències dels harmònics a les freqüències fonamentals.

ESCALA TEMPERADA DE 5 NOTES (pista 1)

ESCALA TEMPERADA DE 5 NOTES	
Nota	Freqüència
1	220
2	252,7136381
3	**290,2917404**
4	**333,4576446**
5	**383,0422479**
6	440

Aquesta escala és l'escala amb un menor nombre de notes que, tanmateix, dóna uns resultats considerablement bons. És important destacar la importància de les escales pentatòniques que, com el nom indica, només tenen cinc notes.

ESCALA TEMPERADA DE 7 NOTES (pista 2)

ESCALA TEMPERADA DE 7 NOTES	
Nota	Freqüència
1	**220**
2	242,899693
3	**268,1830039**
4	296,0980424
5	**326,9187436**
6	360,9475566
7	**398,5184123**
8	**440**

És important no confondre aquesta escala amb l'escala diatònica de set notes. L'escala diatònica de set notes, l'escala major a la que estem acostumats, està construïda a partir de les notes de l'escala temperada de dotze notes i, evidentment, no té la mateixa distància entre cadascuna de les notes. A continuació podem veure les freqüències de les seves notes que coincideixen, com veurem tot seguit, amb les de l'escala de 12 notes. La setena, tanmateix, no apareix a l'escala diatònica. A la pista d'audio sentirem primer l'escala temperada de set notes; després, la diatònica i, per acabar, una comparació nota per nota de totes dues. La primera nota de cada parella sempre correspon a l'escala temperada, excepte la primera i l'última nota de l'escala que és igual per a les dues.

ESCALA DIATÒNICA DE 7 NOTES	
Nota	Freqüència
1	**220**
2	246,9416506
3	**277,182631**
4	293,6647679
5	**329,6275569**
6	369,9944227
7	415,3046976
8	**440**

ESCALA TEMPERADA DE 10 NOTES (pista 3)

ESCALA TEMPERADA DE 10 NOTES	
Nota	Freqüència
1	**220**
2	235,7901618
3	252,7136381
4	**270,8517709**
5	290,2917404
6	311,1269837
7	**333,4576446**
8	357,3910544
9	**383,0422479**
10	410,5345163
11	**440**

Respecte l'escala de 5 notes, només suposa una millora a la tercera. Això sí, una millora considerable. Pel que fa a l'escala de 7 notes, aquesta suposa una millora a la tercera i la setena. En canvi, la quinta és molt similar a ambdós casos, tot i que una mica millor a l'escala de 7 notes.

ESCALA TEMPERADA DE 12 NOTES (pista 4)

ESCALA TEMPERADA DE 12 NOTES	
Nota	Freqüència
1	**220**
2	233,0818808
3	246,9416506
4	261,6255653
5	**277,182631**
6	293,6647679
7	311,1269837
8	**329,6275569**
9	349,2282314
10	369,9944227
11	**391,995436**
12	415,3046976
13	**440**

Aquesta escala és la que utilitzem nosaltres, la que podem trobar a qualsevol piano.

La millora que hi ha a la tercera i, especialment, a la quinta és impressionant. La setena no és tan bona com a l'escala anterior però s'ha de tenir en compte que és l'harmònic amb menys pes.

A més, no trobem cap escala que millori l'escala de dotze notes a totes quatre distribucions dels pesos dels harmònics fins a l'escala de 31 notes. Si ens fixem només amb la millora de la desviació de la quinta, cal esperar-nos també fins a una escala de 29 notes.

ESCALA TEMPERADA DE 31 NOTES (pista 5)

ESCALA TEMPERADA DE 31 NOTES	
Nota	Freqüència
1	220
2	224,9745158
3	230,0615126
4	235,2635337
5	240,5831799
6	246,023111
7	251,5860467
8	257,2747684
9	263,0921203
10	269,0410108
11	**275,1244143**
12	281,3453723
13	287,7069951
14	294,2124632
15	300,8650294
16	307,6680197
17	314,6248353
18	321,7389545
19	**329,0139341**
20	336,4534115
21	344,0611061
22	351,8408217
23	359,7964478
24	367,931962
25	376,2514318
26	**384,7590169**
27	393,4589706
28	402,3556428
29	411,4534815
30	420,7570354
31	430,270956
32	440

A partir d'aquesta escala, les distàncies entre notes consecutives comencen a ser més petites del que estem habituats.

Per tenir una idea de quina distància hi ha entre nota i nota, la calcularem prenent com a unitat de referència la distància que hi ha entre un la i un si, és a dir, un to.

$$d(\text{la, si}) = k\left|\log\frac{220}{246{,}9416506}\right| = 1$$

$$k = \frac{1}{\left|\log\frac{220}{246{,}9416506}\right|} = 19{,}93156268$$

Així doncs, un cop ja sabem el valor de la constant k ja podem procedir a calcular la distància entre dues notes consecutives qualssevol de l'escala de 31 notes.

$$d(n1,n2) = k\left|\log\frac{220}{224{,}9745158}\right| \approx 0{,}19$$

Per tant, la distància entre dues notes consecutives de l'escala és, aproximadament, una cinquena part d'un to.

L'escala de 31 notes suposa una gran millora a la tercera i la setena respecte l'escala de 12 notes. La quinta, en canvi, empitjora lleument. Ara bé, el canvi és tan petit que potser no és ni tan sols perceptible.

ESCALA TEMPERADA DE 41 NOTES (pista 6)

ESCALA TEMPERADA DE 41 NOTES	
Nota	Freqüència
1	220
2	223,7509438
3	227,5658402
4	231,4457796
5	235,391871
6	239,4052422
7	243,4870404
8	247,6384323
9	251,8606042
10	256,1547632
11	260,5221364
12	264,9639723
13	269,4815403
14	**274,0761317**
15	278,7490597
16	283,5016599
17	288,3352908
18	293,2513338
19	298,2511941
20	303,3363007
21	308,5081071
22	313,7680915
23	319,1177573
24	324,5586335
25	**330,0922753**
26	335,7202642
27	341,4442089
28	347,2657454
29	353,1865376
30	359,2082778
31	365,3326872
32	371,5615161
33	377,896545
34	**384,3395845**
35	390,8924762
36	397,5570931
37	404,3353399
38	411,2291541
39	418,2405061
40	425,3713999
41	432,6238735
42	440

De la mateixa manera que a l'escala anterior, podem calcular la distància entre dues notes prenent com a referència un to.

$$d(n1,n2)= k\left|\log\frac{220}{223{,}7509438}\right| \approx 0{,}15$$

Així, la distància entre dues notes consecutives d'aquesta escala és quasi set vegades menor que un to.

Aquesta escala només suposa una millora a la quinta en referència a les escales anteriors. Ara bé, l'aproximació a la quinta natural de l'escala en qüestió és la millor, amb diferència, que ha aparegut fins ara.

ESCALA TEMPERADA DE 53 NOTES (pista7)

ESCALA TEMPERADA DE 53 NOTES	
Nota	Freqüència
1	220
2	222,8961115
3	225,8303478
4	228,8032108
5	231,8152089
6	234,8668575
7	237,9586784
8	241,0912005
9	244,2649595
10	247,4804984
11	250,7383671
12	254,0391228
13	257,3833301
14	260,7715611
15	264,2043952
16	267,6824197
17	271,2062294
18	**274,7764269**
19	278,3936231
20	282,0584366
21	285,7714942
22	289,533431
23	293,3448905
24	297,2065246
25	301,1189938
26	305,0829673
27	309,0991231
28	313,1681482
29	317,2907385
30	321,4675992
31	325,6994446
32	**329,9869987**
33	334,3309947
34	338,7321758
35	343,1912946
36	347,7091139
37	352,2864064
38	356,923955
39	361,622553
40	366,383004
41	371,2061223
42	376,0927327
43	381,0436713
44	**386,0597847**
45	391,1419309
46	396,2909792
47	401,5078103
48	406,7933166
49	412,148402
50	417,5739825
51	423,0709861
52	428,6403531
53	434,283036
54	440

Calcularem la distància entre notes consecutives de la mateixa manera que a les escales anteriors.

$$d(n1,n2)= k\left|\log\frac{220}{222{,}8961115}\right|\approx 0{,}11$$

En aquesta escala, la distància entre dues notes consecutives qualssevol és gairebé una desena part d'un to. Tot i així, encara podem diferenciar les notes sense problemes.

La setena i la tercera de l'escala de 31 notes continuen sent millors que les d'aquesta escala. En canvi, la quinta, l'harmònic amb més pes, és pràcticament exacte.

Per donar per acabada la comparació auditiva tan sols falta una comparació exhaustiva de cadascun dels harmònics. Així doncs, a les següents tres pistes del CD podrem sentir l'harmònic natural seguit de les notes que, en cada escala, s'apropen a l'harmònic en qüestió. Tot seguit tornarà a sonar cada nota però ara sentint sempre l'harmònic davant.

A la pista 8 hi tenim la comparació de les quintes. Per facilitar la comprensió de les notes que seran reproduïdes, explicarem detalladament, en el cas de la quinta, com apareixeran els sons.

- Quinta natural (330 Hz)
- Quinta de l'escala de 5 notes (333,4576446 Hz)
- Quinta de l'escala de 7 notes (326,9187436 Hz)
- Quinta de l'escala de 10 notes (333,4576446 Hz)
- Quinta de l'escala de 12 notes (329,6275569 Hz)
- Quinta de l'escala de 31 notes (329,0139341 Hz)
- Quinta de l'escala de 41 notes (330,0922753 Hz)
- Quinta de l'escala de 53 notes (329,9869987 Hz)
- Quinta natural – quinta de l'escala de 5 notes
- Quinta natural – quinta de l'escala de 7 notes
- Quinta natural – quinta de l'escala de 10 notes
- Quinta natural – quinta de l'escala de 12 notes
- Quinta natural – quinta de l'escala de 31 notes
- Quinta natural – quinta de l'escala de 41 notes
- Quinta natural – quinta de l'escala de 53 notes

La pista 9 conté la comparació de les terceres i la pista 10, la de les setenes. En tots dos casos es segueix l'esquema anterior.

Comentari de les diferències auditives respecte harmònics

Quintes (pista 8): A les tres primeres escales, la diferència entre la nota i l'harmònic es nota considerablement. A l'escala de 12 notes, la diferència auditiva es redueix considerablement. A l'escala de 31 notes, la diferència entre la nota i l'harmònic és quasi imperceptible i, a les dues últimes escales, no hi ha diferència.

Terceres (pista 9): A les dues primeres escales, la diferència és molt gran. La tercera de l'escala de 10 notes s'apropa més a l'harmònic que no pas la tercera de l'escala de 12 notes. A les tres últimes escales ja no podem distingir entre els dos sons.

Setenes (pista 10): La diferència entre les dues notes és molt més gran en el cas de les escales de 7 i 12 notes que en el de les escales de 5 i 10 notes. A les tres últimes escales, si bé potser no acaben de sonar exactament iguals, les dues notes són molt similars.

4.3 Resultats de la recerca

Un cop fet un estudi considerablement extens en el camp de l'escales temperades, cal dir que l'escala ideal que busquem depèn de diversos factors.

Si considerem que els criteris que hem escollit són totalment vàlids, doncs potser caldria tot un altre treball de recerca per trobar els criteris realment adients, hem de tenir en compte amb quina finalitat volem aquesta escala.

Si ho analitzem des d'un punt de vista més o menys teòric, podríem assegurar que la millor escala és l'escala temperada de 53 notes. Gaudeix d'unes desviacions molt petites que no poden ser captades per la nostra oïda i, tanmateix, encara hi podem distingir clarament les distàncies entre les notes que la formen. S'ha d'afegir que no apareix una escala millor a les quatre distribucions dels pesos dels harmònics fins l'escala de 118 notes, on evidentment, les distàncies entre notes consecutives seran molt reduïdes.

Ara bé, si pretenem trobar una escala ideal a nivell pràctic, cal reconèixer que l'escala temperada de 12 notes, la nostra, destaca de manera espectacular. Té unes bones aproximacions als harmònics però, encara que de manera subtil, no eviten que es pugui percebre la diferència entre les notes de l'escala i els harmònics naturals de la tònica (la primera nota).

Malgrat això, segons els nostres criteris, no trobem una millora fins a l'escala de 31 notes que, per nombre de notes, deixa de ser pràctica.

CONCLUSIONS

A l'inici d'aquestes pàgines va començar un llarg camí que no sabia on em duria. Una vegada acabat el treball, me n'he adonat que és molt més important el viatge realitzat que no pas el punt d'arribada. Així doncs, l'estudi de les escales musicals m'ha conduït a unes conclusions finals que no tenen pas més rellevància que el camí traçat al llarg de la investigació. El treball m'ha servit, a grans trets, per aprofundir en la relació que lliga les matemàtiques amb les bases del sistema musical i per obrir els ulls a noves possibles línies d'investigació derivades de l'estudi realitzat.

Penso que és interessant fer, un cop ja s'ha finalitzat el treball, un petit resum que ens permeti lligar totes les idees que han anat apareixent, tant musicals com matemàtiques.

La música és un art que utilitza les notes i, per extensió, les diferents escales musicals com a mitjà d'expressió. Les matemàtiques entren en acció a l'hora de fer la tria de les notes que formaran les escales musicals. Aquesta elecció ve determinada per l'objectiu que es vulgui aconseguir. Com ja hem explicat al treball, la música occidental vol aconseguir que pugui sonar més d'una nota alhora (cantar o tocar amb diferents instruments al mateix temps, tocar un sol instrument que pugui fer més d'una nota a la vegada com ara el piano, etc.). Per tant, caldrà que les notes de l'escala siguin, quan es toquen juntes, el màxim d'agradable a l'orella possible. I com aconseguir-ho? Doncs bé, traient partit a la pròpia naturalesa del so, és a dir, introduint a l'escala aquells sons que, per qüestions purament físiques, són més consonants: els harmònics naturals de cada nota.

El treball presenta una demostració de la impossibilitat de construir una escala que contingui els harmònics de totes les notes que en formen part. Llavors, com podem solucionar el problema? Bé, ja que no es pot incloure l'harmònic exacte caldrà buscar-ne una aproximació que, si és prou bona, ni tan sols percebrem la diferència.

Aquí serà la pròpia música qui ens exigirà una nova condició. El sistema tonal demana que qualsevol fragment musical pugui ser transportat amunt i avall sense que els intervals variïn o, dit d'una altra manera, que les distàncies o intervals entre les notes no depenguin de la nota inicial. I això com es podria fer? Doncs aquest fet ens condueix necessàriament a una escala temperada, és a dir, una escala en la qual la distància entre dues notes consecutives és sempre la mateixa.

Arribats aquí ja tenim els criteris que ens permetran buscar una escala ideal: cal que es tracti d'una escala temperada que contingui notes tan properes com sigui possible als primers harmònics naturals diferents d'octava (la quinta, la tercera i la setena).

Abans de procedir a l'anàlisi dels resultats cal tenir en compte que podem distingir dos tipus de resultats: uns de més teòrics i uns altres més aplicables a la pràctica musical.

Els primers fan palesa l'existència de diverses escales millors que l'escala de temperada de dotze notes que utilitzem actualment. Això sí, les escales on apareixen millores en les desviacions respecte els harmònics naturals ho fan de manera irregular i són escasses en nombre. Segons els nostres criteris, podríem dir que l'escala de 53 notes és una de les millors escales. Les aproximacions als harmònics són tan bones que auditivament no es pot percebre la diferència i, tot i així, encara podem distingir clarament les notes que formen l'escala. Ara bé, és evident que l'ús d'aquesta escala no és factible ni de cara a la fabricació d'instruments ni pel que fa a la posterior interpretació. Us imagineu un piano amb 53 notes a cada octava?

Malgrat tot, no s'ha de perdre de vista que actualment els suports informàtics ens permeten sintetitzar i editar so fàcilment i, per tant, potser la música electrònica podria servir-se d'una escala d'aquestes característiques.

Pel que fa al segon tipus de resultats, demostren, sense mena de cap dubte, que l'escala actual és la millor opció que tenim. L'escala temperada de dotze notes és el resultat d'un estira i arronsa entre la perfecció i la utilitat pràctica que ha permès la creació i interpretació d'una música excel·lent durant segles. Aquesta escala té unes desviacions respecte els harmònics bastant bones, tanmateix, la diferència es pot percebre auditivament (és petita però perceptible si es fa una comparació directa de la nota amb l'harmònic). Ara bé, també cal tenir en compte que fins l'escala de 31 notes no trobem una millora en les desviacions.

A més, no hem d'oblidar que hi ha hagut certes escales amb un menor nombre de notes que han obtingut unes desviacions considerablement bones: les escales temperades de 5, 7 i 10 notes.

La primera vegada que em van suggerir que dediqués el treball de recerca a l'estudi de les escales musicals vaig pensar que ben aviat exhauriria tot allò que es pogués investigar sobre aquest tema. Res més allunyat de la realitat! A mesura que he avançat en el meu estudi han anat sorgint interrogants que m'han fet pensar en nous temes per a posteriors investigacions.

Des del punt de vista matemàtic crec que seria interessant estudiar la regularitat amb la qual apareixen les millores en les desviacions dels harmònics. Es tracta d'unes aparicions aparentment irregulars que cada vegada són més espaiades entre elles de manera que, tot i que potser 65000 escales no són suficients per afirmar-ho, fan pensar en la freqüència amb la que apareixen els nombres primers. Es podria trobar alguna funció que descrivís l'aparició de millores en les desviacions?

Des d'un punt de vista musical, considero que seria interessant tant escriure composicions per a les noves escales construïdes al treball com adaptar composicions preexisistents a l'escala temperada de dotze notes per a ser escoltades i comparades en altres escales. Avui tenim uns mitjans tècnics que fan que tot això i més sigui possible. Encara que el valor musical d'aquests experiments no sigui gaire elevat, penso que podria servir per trobar noves idees i, en definitiva, ampliar els nostres horitzons.

Finalment, vull dir que aquest treball ha representat per a mi la possibilitat d'unir dos mons. M'ha suposat un gran i valuós esforç l'estructuració dels coneixements musicals que he anat adquirint al llarg de molts anys d'estudiar música per poder explicar la teoria bàsica d'una manera clara (si més no, aquesta n'era la intenció) i relacionar-ho amb tota la part matemàtica. Així, també m'ha servit per comprovar la potència de les matemàtiques a l'hora d'organitzar i estructurar un objecte sense cap mena de relació aparent. Per últim, m'ha permès endinsar-me lleugerament al llenguatge matemàtic, al qual estic poc habituada.

Fins i tot darrere l'art hi trobem les matemàtiques.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

· BENSON, D. 2003. *Maths and music*. Georgia (EUA): Departament de matemàtiques de la Universitat de Georgia.

· GIRBAU, J. "Les matemàtiques i les escales musicals". *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Vol.18. Octubre 1985. P.3-27.

· WALTER, P. 1987. *Armonía*. Traducció al castellà, 2001. Barcelona: Idea Books, SA. Col·lecció Idea Música.

· *Diccionari de la Llengua Catalana*.1994. Barcelona: Enciclopèdia Catalana.

ANNEX: PROGRAMA PER A CALCULAR DESVIACIONS

Aquest apartat no ha estat inclòs dins el treball pròpiament dit perquè no era la finalitat d'aquest últim la realització d'un programa d'ordinador sinó que tan sols s'ha utilitzat com a eina de treball. El programa es troba al CD adjunt al final del treball i cal obrir el fitxer anomenat 'desviacions.xls' amb el programa Microsoft Excel.

Aquí no explicarem de manera exhaustiva com s'ha elaborat tot el programa però si que en destacarem les idees bàsiques.

El programa està compost per nou fulls de càlcul. Els tres primers es dediquen a la recerca de millores en les desviacions respecte cadascun dels harmònics (la quinta, la tercera i la setena), els quatre últims treballen amb les quatre distribucions diferents dels pesos de cada harmònic per a trobar les desviacions totals de les escales i els dos fulls de càlcul restants resumeixen els resultats obtinguts.

Desviació respecte un harmònic

A l'apartat corresponent del treball trobem que la desviació respecte un harmònic es calcula de la següent manera:

$$\text{Desviació} = \left| \frac{m \log 2}{n} - \log 3 \right|$$

En aquest cas, es tracta de la desviació de la quinta, però obtenim de la mateixa manera les desviacions de la tercera i la setena canviant el log3 per log5 i log7 respectivament.

Quan volem introduir aquesta fórmula a l'ordinador sorgeix un problema: no coneixem la m, és a dir, no sabem quina és la nota de l'escala que farà que la distància l'harmònic i la nota en qüestió sigui la mínima possible.

Si reflexionem sobre el significat de la fórmula veurem que la desviació no donarà mai zero perquè m ha de ser un nombre enter. Malgrat això, sí que existeix un valor no enter per a m que compleixi que:

$$\left|\frac{m\log 2}{n} - \log 3\right| = 0$$

Trobar aquest valor implica aïllar la m a l'equació:

$$m = \frac{n \times \log 3}{\log 2}$$

Així doncs, la nota que farà la distància mínima serà la corresponent al valor de m arrodonit sense decimals. És evident que el raonament es pot extrapolar a les desviacions de la tercera i la setena.

Si obrim el primer full de càlcul veurem que hi ha sis columnes plenes de nombres:

- Columna 1: Consisteix en una sèrie de nombres de 1 a 65536 (el nombre màxim de files de l'Excel) que corresponen a la n de la fórmula, és a dir, indiquen el nombre de notes de l'escala temperada en qüestió.
- Columna 2: Valor de m que fa que la equació sigui igual a zero, per tant, es tracta d'un nombre que mai pot ser enter.

  $m = \frac{n \times \log 3}{\log 2}$ El valor de n l'agafem de la columna anterior.
- Columna 3: Arrodonim el valor anterior a la unitat. Ja tenim m, la nota que farà que la diferència respecte l'harmònic sigui la més petita possible en aquella escala.
- Columna 4: Desviació de l'escala respecte l'harmònic.

  $$\text{Desviació} = \left|\frac{m\log 2}{n} - \log 3\right|$$
- Columna 5: Només ens interessen les desviacions que suposin una millora respecte les desviacions que han aparegut en les escales anteriors. Per tant, si la desviació és la millor que ha aparegut fins aleshores aquesta columna mostrarà la desviació de l'escala en

qüestió. En cas contrari, la columna mostrarà la desviació de l'última escala que mostra una millora. Amb un llenguatge no exacte, traduirem la fórmula que utilitza l'ordinador per fer els càlculs:

Si el nombre que apareix a la casella de la columna anterior és menor que el de la fila superior, la columna 5 mostrarà el nombre de la columna anterior; si no, el de la fila superior.
Si (FC(-1) < F(-1)C; FC(-1) ; F(-1)C)

- Columna 6: Apareix el nombre de notes (n, que apareix a la primera columna) de les escales que suposen una millora. Aquelles escales que no representin una millora en la desviació tindran un NO en aquesta columna.
  Si (FC(-1) < F(-1)C(-1); FC(-5) ; "NO")

Els dos fulls de càlcul següents segueixen exactament el mateix esquema.

Desviació total d'una escala

Consisteix en fer una mitjana ponderada utilitzant com a dades les desviacions obtingudes en els tres primers fulls de càlcul.

Així els fulls de càlcul 6, 7, 8 i 9 segueixen exactament el mateix esquema utilitzant diferents distribucions dels pesos dels harmònics:

- Columna 1: Mitjana ponderada de les tres desviacions. La fórmula emprada per l'ordinador és la següent:

$$\text{dtotal} = \frac{p_1 \times \text{dqu int a} + p_2 \times \text{dtercera} + p_3 \times \text{dsetena}}{p_1 + p_2 + p_3}$$

on les tres desviacions s'obtenen dels fulls de càlcul anteriors.

- Columna 2: Només reflecteix aquelles desviacions que suposin una millora respecte les anteriors.
  Si (FC(-1) < F(-1)C; FC(-1) ; F(-1)C)

- Columna 3: Retorna el nombre de notes de l'escala si aquesta té una desviació que millora les anteriors. En cas contrari hi apareix NO.
  Si (FC(-1) < F(-1)C(-1); FILA(FC) ; "NO")
- Columna 4: Si la desviació és millor que les desviacions anteriors, apareix el seu valor.
  SI(FC(-2)<F(-1)C(-2);FC(-3);"NO")
- Columna 5: Columna 3 ordenada.
- Columna 6: Desviacions de les escales que apareixen a la columna anterior.