TREBALL I ENERGIA

Index

P.1. Concepte de treball

Definicions

T.1.1 **Definició de treball**. Definim el treball (W) realitzat per una força constant $\vec{F}$ en desplaçar-se una distància $\overrightarrow{?x}$, com el producte escalar entre la força i el vector desplaçament:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot ?\vec{x} = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha} \quad (1)$$

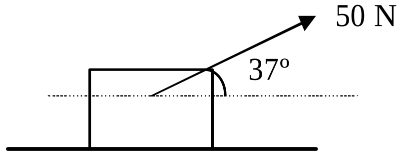
on F representa el mòdul de la força, Δx el desplaçament i α l'angle que formen el desplaçament amb la força aplicada.

Unitats: joule (J)

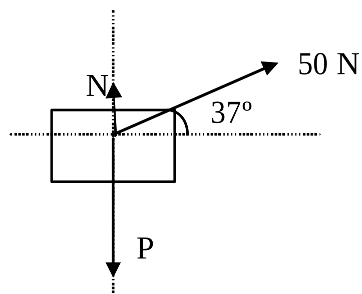
Exercicis

E.1.1. Estirem una maleta de 8 kg de massa amb una força de 50 N que forma un angle de 37º amb l'horitzontal per una superfície rugosa que té un coeficient de fricció dinàmic de 0'25. Calculeu:

a) El treball realitzat per cada una de les forces que actuen sobre la maleta quan aquesta s'ha desplaçat 5 m.
b) El treball total realitzat sobre la maleta.



Solució



Dibuixem el diagrama del sòlid lliure amb totes les forces que hi actuen i en calculem els valors:

F = 50 N

P = 8·9'8 = 78'4 N

N = P – F·sin 37º = 48'31 N

$F_R = \mu_d \cdot N = 12'08$ N

(El subíndex d *indica que el coeficient de fricció és dinàmic, ja que la maleta s'està movent...)*

Els treballs corresponents són:

$W_F = 50 \cdot 5 \cdot \cos 37 =$ **199'65 J**
$W_P = 78'4 \cdot 5 \cdot \cos 270^\circ =$ **0 J**
$W_N = 48'31 \cdot 5 \cdot \cos 90^\circ =$ **0 J**
$W_{FR} = 12'08 \cdot 5 \cdot \cos 180^\circ =$ **-60'4 J**

(Noteu que les forces perpendiculars al desplaçament no fan treball, i les forces que actuen en sentit contrari al desplaçament donen valors del treball negatius!)

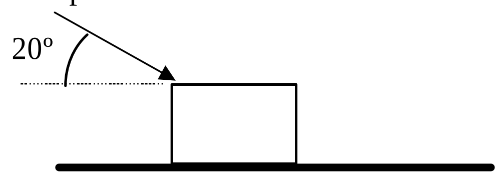
b) El treball total correspondrà a la suma de tots els treballs que actuen sobre la maleta:

$W_T = 199'5 - 60'4 + 0 + 0 = \boxed{139'1 \text{ J}}$

Tornem-hi...

P.1.1 Un bloc de 5 kg de massa que es troba sobre una superfície horitzontal es pressiona amb una força de 40 N. El coeficient de fricció estàtic val 0'3 i el dinàmic 0'2.

a) Demostreu que el cos llisca sobre la superfície horitzontal.
b) Calculeu el treball de cada una de les forces que actuen sobre el bloc, quan aquest s'ha desplaçat 3 metres.
c) Calculeu el treball total realitzat sobre el bloc en els 3 metres.



Solució: b) W_{FR}=-37'6 J, W_F=112'76 J, c) W=75'16 J.

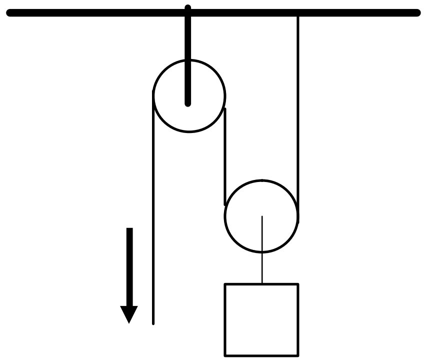
P.1.2 Un bloc de 3 kg de massa llisca per un pla inclinat sense fricció. L'angle que fa el pla inclinat amb l'horitzontal és de 45º.

a) Calculeu el treball que fa cada una de les forces que actuen sobre el bloc quan el cos ha baixat una altura de 50 cm.
b) Quin és el treball total realitzat sobre el bloc?

Solució: a) W_P = 14'7 J, b) W = 14'7 J.

P.1.3 Repetiu el problema anterior però suposant que la superfície del pla inclinat té un coeficient de fricció estàtic de valor 0'4 i un de dinàmic de valor 0'3. Comproveu primer que amb aquestes condicions el cos llisca pel pla inclinat.

Solució: *a)* W_P = 14'7 J, W_{FR} = -4'41 J,b) W=10'29 J.



P.1.4 A la figura tenim dues politges que s'utilitzen per aixecar una càrrega de 80 kg. Estirem la corda amb una força suficient perquè la caixa pugi a velocitat constant. Si no hi ha fricció entre la corda i les politges, i aquestes tenen una massa negligible, calculeu:

a) La força amb què l'estirem.
b) El treball que hem de fer perquè la caixa pugi mig metre.
c) Quin seria el treball que hauríem de fer si aixequéssim la caixa directament del terra mig metre?

Solució: a) 392 N, b) 392 J, c) la mateixa.

P.2. Teorema del treball i de l'energia cinètica

Definicions

T.2.1 **Energia**. És la capacitat que té un cos per desenvolupar un treball. De la mateixa definició d'energia es dedueix que les unitats de l'energia són les mateixes que les del treball: el joule (J).

T.2.2 **Definició de l'energia cinètica**. És l'energia associada a un cos pel fet de tenir moviment, i es calcula a partir de l'expressió:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (2)$$

T.2.3 **Teorema del treball i de l'energia cinètica**. Aquest teorema ens diu el següent: el treball total realitzat sobre la partícula és igual a la seva variació d'energia cinètica i se simbolitza mitjançant l'equació:

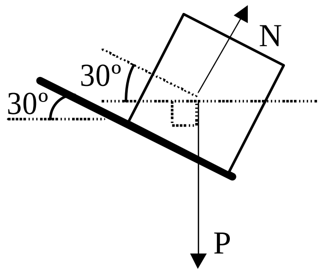
$$\boxed{W_{total} = \Delta E_c} \qquad (3)$$

on ΔE_c representa la diferència entre l'energia cinètica final i la inicial.

Exercicis

E.2.1. Un bloc de 2 kg de massa és llançat amb una velocitat inicial v_0, des de baix de tot d'un pla inclinat sense fricció que té una inclinació de 30º respecte a l'horitzontal. Després de recórrer 2 metres sobre el pla inclinat, s'atura. Calculeu la velocitat amb què s'ha llançat el bloc.

Solució



Aplicant el teorema de l'energia cinètica sabem que:

$W_{total} = E_{c\,f} - E_{c\,0}$

Hem de buscar el treball total de les forces que actuen sobre el bloc:

$W_N = 0$ J (direcció perpendicular al desplaçament)
$W_P = P\cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = 2\cdot 9'8\cdot 2\cdot \cos(30+90) = -19'6$ J

$W_{total} = -19'6$ J

$$-19'6 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot v_0^{\,2}$$

Aïllant de l'expressió anterior la velocitat, s'obté:

$\boxed{v_0 = 4'42\ m/s}$

> E.2.2. Es dispara un projectil verticalment i cap amunt amb una velocitat de 1200 m/min. Si la massa del projectil és de 50 g i considerem negligible la resistència de l'aire, calculeu:
> a) L'altura màxima a què arriba, utilitzant el teorema de l'energia cinètica.
> b) L'energia cinètica que té quan es troba a 5 metres de terra.
> c) El temps que triga a tornar a terra.

Solució

a) L'única força que actua sobre el projectil és el pes, $P = 0'05\cdot 9'8 = 0'49$ N.
Apliquem el teorema del treball i l'energia cinètica:

$$W_{total} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_f^{\,2} - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^{\,2}$$

Com que coneixem les velocitats (a l'altura màxima la velocitat final és nul·la i la inicial la passem a m/s i s'obté 20 m/s), podem trobar el W_{total}:
$W_{total} = -10$ J

Si calculem el treball total: $W_{total} = W_{pes} = 0'49\cdot h\cdot \cos 180º = -0'49\ h$
(L'angle és de 180º, ja que el projectil es desplaça cap amunt i el pes va en sentit contrari, cap avall.)

Per tant,

-0’49h = -10

h = $\boxed{20'41 \text{ m}}$

b) Aplicant un altre cop el teorema anterior:

W_{total} = 0’05·9’8 · 5· cos 180º = - 2’45 J

$$-2'45 = \frac{1}{2}\cdot 0'05\cdot v^2 - \frac{1}{2}\cdot 0'05\cdot 20^2$$

$$\boxed{v = 17'38 \text{ m/s}}$$

c) Aplicant les fórmules de cinemàtica podem trobar el temps que triga a assolir l’altura màxima, ja que coneixem l’espai recorregut (20’41 metres) i les velocitats inicial i final (20 m/s i 0 m/s, respectivament)

$v = v_0 + a\cdot t$

$$t = \frac{0-20}{-9'8} = 2'041 \text{ s}$$

Com que el temps de pujada és igual al de baixada, podem trobar el temps total que triga a tornar a terra:

$$\boxed{t_{total} = 4'082 \text{ s}}$$

Tornem-hi...

P.2.1 Un cos de 5 kg de massa rellisca per un pla inclinat sense fricció de 3 metres de longitud. Si la inclinació del pla inclinat és de 42º respecte a l’horitzontal, trobeu la velocitat amb què arriba el cos a baix del pla inclinat.

Solució: 6’27 m/s

P.2.2 Repetiu el problema anterior però tenint en compte que la superfície del pla inclinat té un coeficient de fricció dinàmic de 0’15.

Solució: 5’72 m/s

P.2.3 Un cos de 250 g és llançat des de dalt d’un pla inclinat amb una velocitat de 5 m/s. Si el pla inclinat té una altura de 8 metres i la seva inclinació respecte a l’horitzontal és de 37º, calculeu la velocitat amb què el cos arribarà a baix del pla inclinat:

a) Si no hi actua fricció.
b) Si la superfície té un coeficient de fricció dinàmic de 0’2.

Solució: a) 13’48 m/s, b) 11’84 m/s.

P.2.4 Una caixa de 40 kg és arrossegada mitjançant una força horitzontal paral·lela al terra de valor 175 N. Els coeficients de fricció estàtic i dinàmic són 0’35 i 0’27, respectivament.

a) Demostreu que la caixa llisca per la superfície horitzontal.
b) Calculeu el treball total que es fa sobre la caixa en 10 metres.
c) Quina velocitat adquirirà la caixa quan s’hagi desplaçat 10 metres pel terra? (utilitza el teorema del treball i l’energia cinètica).

Solució: b) 691’6 J, c) 5’88 m/s.

P.2.5 Una massa de 12 kg, inicialment en repòs, s’aixeca fins a una altura de 4 metres mitjançant una força vertical de 180 N.

a) Calculeu el treball realitzat per les forces que actuen sobre l’objecte, així com el treball total realitzat sobre aquest.
b) L’energia cinètica final del bloc i la seva velocitat.

Solució: a) 249’6 J, b) 6’45 m/s.

P.2.6 Una caixa de 12 kg es mou sobre una superfície horitzontal amb fricció en aplicar-hi una força horitzontal constant de 200 N. Si en el moment d’aplicar-hi la força la caixa anava a una velocitat de 15 m/s, i al cap de 5 segons es mou amb una velocitat de 60 m/s, calculeu:

a) El treball total aplicat sobre la caixa.
b) La força de fricció que actua sobre la caixa.
c) El coeficient de fricció dinàmic.

Solució: a) W = 20.250 J, b) 92 N, c) 0’78.

P.3. Concepte de potència

Definicions

T.3.1. **Potència**. Definim la potència P subministrada per una força F com el treball que fa aquesta força per unitat de temps.

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \qquad (4)$$

Unitats: 1 J/s = 1 Watt (W)

T.3.2. **Potència i velocitat**. Si suposem que la partícula es desplaça amb una velocitat instantània *v*, llavors el desplaçament realitzat en un interval petit de temps el podem expressar com: dx = v·dt, i per tant la potència en aquest interval petit de temps serà:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot dx \cdot \cos a}{dt} = F \cdot v \cdot \cos a$$

Si la força i la velocitat van en la mateixa direcció i sentit, llavors l’expressió anterior la podem escriure com:

$$\boxed{P = F \cdot v} \quad (5)$$

T.3.3. En motors, se sol definir el rendiment del motor com:

$$\boxed{? = \frac{P_{util}}{P_{consumida}} \cdot 100} \quad (6)$$

on P útil és la potència utilitzada per generar treball de tota la potència consumida pel motor (és evident que una part d'aquesta energia es perd en forma de calor, friccions…). El valors dels rendiments s'expressen en forma de percentatges.

Exercicis

E.3.1. Un motor d'una grua aixeca caixes de 100 kg de pes fins a una altura de 15 metres en 30 segons. Calculeu la potència mínima que ha de donar el motor per aixecar les caixes.

Solució

Podem calcular la potència aplicant la fórmula anterior:

$$P = \frac{W}{t}$$

El treball haurà de ser el treball mínim, ja que el problema ens demana la potència mínima. El treball mínim es produirà quan la força que estiri les caixes sigui mínima, i per tant, l'acceleració que les aixequi sigui la mínima possible. El valor mínim de l'acceleració és 0, i per tant, les caixes pugen a velocitat constant. Així:

$$F - P = m \cdot a \quad \Longrightarrow \quad a = 0;\ F = P = 100 \cdot 9'8 = 980 \text{ N}$$

$$W = 980 \cdot 15 = 14700 \text{ J}$$

$$P = \frac{14700}{30} = 490 \text{ W}$$

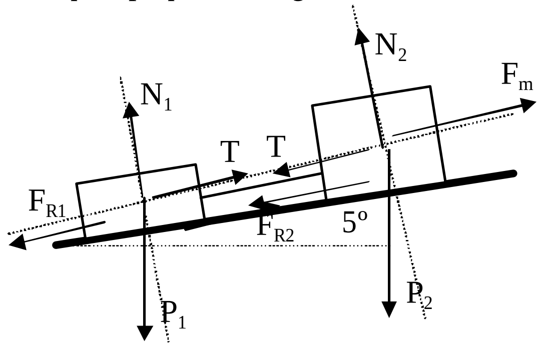
E.3.2. Un cotxe de 800 kg arrossega un remolcador carregat que pesa 100 kg per una carretera que s'enfila amb un pendent de 5º d'inclinació i on hi ha un coeficient de fricció de 0'2. Si el cotxe va a una velocitat constant de 60 km/h, calculeu la potència que fa el cotxe.

Solució

La potència és el treball per unitat de temps. Caldrà calcular el treball que fa el cotxe per unitat de temps. Com que sabem la velocitat del cotxe, utilitzarem l'expressió:

$P = F \cdot v$

Per trobar la força que fa el cotxe només cal que apliquem la segona llei de Newton al conjunt cotxe-remolcador:



Com que es mou a velocitat constant, l'acceleració és nul·la. Fent el balanç de forces en la direcció paral·lela al pla inclinat:

$F_m - F_{R1} - F_{R2} - T + T - P_{x1} - P_{x2} = 0$

Canviant les forces de fricció per les seves expressions corresponents,

$F_m = P_1 \cdot \sin 5^o + P_2 \cdot \sin 5^o + \mu \cdot (N_1 + N_2)$

(Noteu que el coeficient de fricció correspondria al coeficient de fricció dinàmic. Els dos objectes llisquen per la carretera.)

$\mathbf{F_m = 2526\ N}$

(S'han obtingut els valors de les normals fent el corresponent balanç de forces en la direcció horitzontal.)

$P = 2526\ N \cdot 16'67\ m/s = \boxed{42.108'42\ W}$

Tornem-hi…

P.3.1 Un ascensor té una massa de 1.200 kg i pot transportar una càrrega màxima de 600 kg. Uns rodets posats a les cares laterals friccionen amb la paret i frenen el moviment de l'ascensor. El valor d'aquesta força de fricció es pot suposar constant i de valor 4.200 N. Calculeu:

a) La potència mínima que ha de donar el motor per poder aixecar l'ascensor amb la seva càrrega màxima a una velocitat de 2 m/s.

b) La potència instantània que dóna el motor si es construeix de manera que s'assoleixi una acceleració cap amunt d'1'5 $m \cdot s^{-2}$ (deixeu el resultat en funció de la velocitat instantània).

Solució: a) 43680 W, b) 24540· v.

P.3.2 Un motor estira una caixa de 150 kg per una superfície plana horitzontal que té un coeficient de fricció de 0'35. Calculeu:

a) La potència que ha de donar el motor per moure la caixa a una velocitat constant de 5 m/s.

b) El treball que fa el motor en 5 minuts.

Solució: a) 2572’5 W, b) 771’75 kJ.

P.3.3 Un motor de 8 kW funciona 8 hores cada dia i consumeix 10 litres de combustible. Si aquest combustible té un poder energètic de $3\cdot10^7$ J per litre, calculeu:

a) La potència consumida pel motor en un dia.
b) El rendiment del motor.

Solució: a) 10’15 kW, b) 76’8 %

P.3.4 Un motor de 20 kW de potència consumeix 5 kg de combustible per cada hora de funcionament i té un rendiment del 40 %. Calculeu:

a) La potència consumida, en kW.
b) L’energia consumida per cada hora de funcionament, expressada en kJ.
c) El poder energètic del combustible, expressat en kJ/kg.

Solució: a) 50 kW, b) $1'8\cdot 10^4$ kJ, c) 36.000 kJ/kg.

P.3.5 Una bomba accionada per un motor elèctric ha elevat 200 m^3 d’aigua a 50 m d’altura. Calculeu:

a) El treball realitzat en joules.
b) Si l’energia elèctrica consumida ha estat de 70 kWh, quin ha estat el rendiment de la instal·lació?

Solució: a) $9'8\cdot 10^7$ J, b) 38’8 %.

P.4. Forces conservatives i energia potencial

Definicions

T.4.1. **Forces conservatives**. Definim una *força conservativa* si el treball que fa per anar d’un punt *A* a un punt *B* és sempre el mateix, independentment del camí que segueix per anar d’aquest punt *A* al punt *B*. Podem concloure, doncs, que el treball que fa una força conservativa és independent de la trajectòria quan ens movem d’un punt a un altre.

T.4.2. **Energia potencial associada a una força conservativa**. A aquestes forces conservatives podem associar-los una funció anomenada funció *energia potencial* (que representarem mitjançant la lletra *U*). Es defineix de tal manera que el treball realitzat per una força conservativa per anar d’un punt A a un punt B és igual a la disminució de la funció energia potencial:

$$\boxed{W = -\int \vec{F}\cdot d\vec{x} = -?\,U} \qquad (7)$$

T.4.3. **Exemples de forces conservatives i càlcul de la seva energia potencial**. Són conservatives les forces següents: la força gravitatòria, la força elàstica d'una molla i la força elèctrica, entre d'altres. Substituint el valor de la força en la integral anterior, fent el producte escalar corresponent i integrant l'expressió resultant es poden obtenir els valors de les energies potencials per als casos anteriors, que anotem a continuació (el valor de l'energia potencial elèctrica ja es donarà a l'apartat corresponent de camp elèctric).

T.4.4. **Energia potencial gravitatòria (associada a la força gravitatòria)**

$$\boxed{U_{pg} - U_{pg0} = m \cdot g \cdot h} \qquad (8)$$

on *m* és la massa de l'objecte, *g* el valor de la gravetat i *h* la variació d'altura que experimenta el cos. Col·locant els valors amb les unitats del SI, s'obté el resultat en joules.

Generalment escollim el valor de U_{pg0} com a zero, quan la partícula es troba a l'altura h=0, i llavors la fórmula anterior queda simplificada, ja que aquest terme desapareix.

T.4.5. **Energia potencial elàstica (associada a la força elàstica d'una molla)**

$$\boxed{U_{pe} - U_{pe0} = \frac{1}{2} k \cdot ? x^2} \qquad (9)$$

on *k* és la constant de la molla (mesurada en N/m) i Δx representa el que s'allarga respecte a la seva posició d'equilibri sense tensar (x_0): $\Delta x = x - x_0$ (en m). El resultat també és en joules, si es treballa amb les unitats del SI.

Generalment escollim el valor de U_{pe0} com a zero, quan la molla es troba a la posició $x_0=0$ sense tensar, i llavors l'expressió se simplifica, ja que aquest terme desapareix, i l'expressió amb $\Delta x = x - x_0$ val només *x*. De manera que podem escriure: $U_{pe} = 1/2 \cdot k \cdot x^2$.

Recordeu que **la força elàstica** d'una molla val **F = -k·x.**

Exercicis

E.4.1. Un cos de 2 kg cau des d'una altura de 5 metres. Determineu:

a) L'energia potencial del cos quan es troba a 1 metre del terra.
b) L'energia cinètica just abans de tocar amb el terra i la velocitat d'impacte amb el terra.

Solució

a) Agafant com a valor de l'energia potencial gravitatòria igual a 0 quan l'altura és 0, podem calcular el valor de l'energia potencial gravitatòria a 1 metre:

$U_{pg} = m·g·h = 2·9'8·1 = 19'6$ J.

b) Per trobar l'energia cinètica en el moment de l'impacte podem utilitzar el teorema de l'energia cinètica:
$W_{total} = \Delta E_c$

El treball total és el treball de totes les forces que actuen sobre el cos. Però com que és una caiguda lliure, aquest objecte només està sotmès a la força gravitatòria (el seu pes). Com que és una força conservativa, sabem que el treball val la diferència d'energia potencial entre els dos punts que estudiem; llavors:

$W_P = -\Delta U = -(U - U_0) = -(0 - 98) = 98$ J

$W_{total} = 98 = E_{cf} - E_{c0} = E_{cf} - 0$

$\boxed{E_{cf} = 98 \text{ J}}$

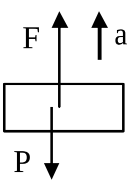
I canviant el valor de l'energia cinètica per la seva expressió, s'obté el valor de la velocitat, que és: $\boxed{v = 9'89 \text{ m/s}}$

E.4.2. Una grua aixeca un bloc de 15 kg amb una força de 170 N vertical i cap amunt. Calculeu:

a) L'energia cinètica i la velocitat que porta el bloc al cap de 15 segons.
b) L'energia potencial al cap dels 15 segons.
c) La potència instantània que desenvolupa la grua en l'instant t=15 s.

Solució

a) Calculem l'acceleració amb què puja el bloc a partir de la segona llei de Newton:



$F - P = m·a \Longrightarrow a = 1'53 \text{ m/s}^2$

I ara, per cinemàtica, la velocitat al cap de 15 s:

$v = 0 + 1'53·15 = \boxed{22'95 \text{ m/s}}$

L'energia cinètica, calculada a través de la fórmula corresponent, val:

$E_c = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 22'95^2 = \boxed{3950'27 \text{ J}}$

(Aquest apartat també es podria fer a partir del teorema del treball i l'energia cinètica, però caldria buscar primer de tot el desplaçament...)

b) A partir de la definició, calculem $U_{pg} = 15·9'8·172'125 = 25.302'38$ J

Calculem, amb les fórmules de cinemàtica, l'altura a la qual està quan han transcorregut els 15 segons:

$$v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot \Delta x \Longrightarrow \Delta x = 172'125 \text{ m.}$$

c) La potència és el treball per unitat de temps. Com que coneixem la velocitat instantània a 15 segons i la força de la grua, podem aplicar $P = F\cdot v$; llavors:

$$P = 300 \cdot 22'95 = \boxed{6.885 \text{ W}}$$

E.4.3. Una molla té una constant de 10^4 N/m. Quant ha d'allargar-se perquè la seva energia potencial sigui de 100 J?

Solució

Prenent com a energia potencial elàstica 0 quan no està estirada, llavors apliquem la fórmula de l'energia potencial i aïllem *x*:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \Longrightarrow \boxed{x = 0'141 \text{ m}}$$

E.4.4. La força que actua sobre una partícula que es mou sobre l'eix de les *x* ve donada per l'expressió $F = -a\cdot x^2$, on *a* és una constant:

a) Calculeu l'energia potencial $U(x)$, sabent que $U = 0$ quan $x = 0$

b) Representeu-la gràficament.

a) A partir de la definició de l'energia potencial obtenim:

$$? U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{x} = -\int F \cdot dx \cdot \cos 0^o = -\int_0^x - ax^2 dx = \left[\frac{a\,x^3}{3}\right]_0^x$$

$$U(x) - U(0) = \frac{ax^3}{3}$$

I com que $U(0) = 0$, obtenim que: $\boxed{U(x) = \frac{ax^3}{3}}$

b) Només cal donar valors a la funció i després representar-la gràficament (és un polinomi de tercer grau; per tant, amb simetria imparell passant pel punt (0,0)). Haureu de graduar les divisions verticals i horitzontals en funció de *a*.

E.4.5. Determineu la força F que actua en la direcció de les *x*, si aquesta força està associada amb la funció d'energia potencial $U(x) = k\cdot x^4$. Calculeu també els punts on aquesta força és nul·la.

Solució

a) Si l'energia potencial s'obté a partir de la integral de la força, és fàcil deduir que la força s'obtindrà a partir de la funció inversa, és a dir, de la derivada de l'energia potencial:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -4 \cdot k \cdot x^3$$

b) Si volem els punts on la força és nul·la, només hem d'igualar el resultant anterior a zero, del qual es veu clarament que $x = 0$. Per tant, només hi ha un punt.

Tornem-hi…

P.4.1 Una caixa de 2 kg cau des del punt més alt d'un pla inclinat sense fricció de 10 m de longitud i que té un angle d'inclinació de 30º. Determineu:

a) L'energia potencial en el moment en què comença a caure.
b) L'energia cinètica i la velocitat quan arriba a baix de tot del pla inclinat.
c) L'energia cinètica i la velocitat quan es troba a la meitat del recorregut.

Solució: a) 98 J, b) 98 J, 9'89 m/s, c) 49 J, 7 m/s.

P.4.2 Apliquem una força de 50 N sobre una molla i aconseguim comprimir-la 1 cm. Calculeu:

a) La constant de la molla, en N/m.
b) L'energia potencial elàstica de la molla quan s'ha comprimit 5 cm.

Solució: a) 5.000 N/m, b) 6'25 J.

P.4.3 Disparem verticalment i cap amunt un projectil de 100 g de massa amb una velocitat de 20 m/s. Podem suposar que sobre el projectil hi actua una força de fricció constant durant tot el recorregut i de valor 0'5 N. Calculeu:

a) L'energia cinètica que té quan es dispara el projectil.
b) L'energia potencial que assoleix quan es troba en el punt més alt de la trajectòria.
c) El treball realitzat per la força de fricció durant tot el recorregut.

Solució: a) 20 J, b) 13'25 J, c) -6'75 J.

P.4.4 Una força aplicada sobre l'eix de les x té una energia potencial associada de valor $U = \frac{A}{x^2}$. Determineu:

a) El valor de la força en funció de x.
b) La relació entre la força quan passa del punt $x=1$ al punt $x=2$.

Solució: a) $2A/x^3$, b) 1/8.

P.4.5 Una força aplicada sobre l'eix de les x ve donada per l'expressió $F(x) = 5x^3 - 2x^2$, en unitats del SI. Determineu:

a) L'expressió, en funció de x, de l'energia potencial $U(x)$ sabent que U= 0 al punt $x=0$.
b) Hi ha algun altre punt on l'energia potencial sigui nul·la?

Solució: a) $5x^4/4 - 2x^3/3$ b) 8/15 m

P.4.6 Comprimim 2 cm una molla de constant k= 100 N/m que està lligada per un extrem, i a l'altre extrem hi ha una massa d' 1 kg. El conjunt molla-bloc es troba sobre una taula sense fricció. Calculeu:

a) L'energia potencial elàstica que té la molla quan està comprimida.
b) El treball total que fa la molla des de l'inici fins que es descomprimeix.
c) L'energia cinètica i la velocitat que adquireix el bloc d'1 kg quan la molla s'ha descomprimit.

Solució: a) 0'02 J, b) 0'02 J, c) 0'02 J, 0'2 m/s.

P.5. Forces no conservatives

Definicions

T.5.1. **Forces no conservatives**. Són aquelles forces en què el treball que fa la força per anar d'un punt A a un punt B depèn del camí que segueix. Un exemple d'aquestes forces és la fricció. El treball que fan aquests tipus de forces es calcula a partir de la definició de treball (punt 1), i en aquestes forces no es pot definir una funció energia potencial.

Exercicis

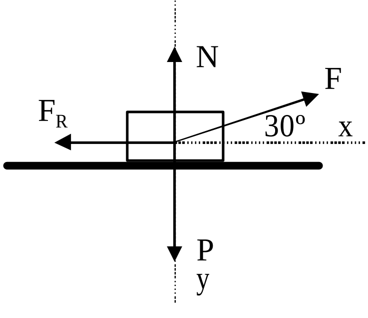
E.5.1. Una força constant de 4 N actua formant un angle de 30º amb l'horitzontal sobre una caixa de 2 kg de massa que descansa sobre una superfície horitzontal rugosa. La caixa es mou a una velocitat constant de 50 cm/s. Determineu:

a) La força normal que exerceix la taula sobre la caixa i el coeficient de fricció.
b) La potència de la força aplicada.
c) El treball realitzat per la força de fricció durant 3 segons.

Solució

a) Per calcular la força normal cal aplicar la segona llei de Newton per a les components verticals. Sabent que la caixa no es mou en aquesta direcció ($a_y = 0$) trobem que:

$$N + F_y - P = 0$$



Utilitzant la trigonometria i aïllant N obtenim:

$$N = P - F_y = P - F\cdot\sin30º = \boxed{17'6\ N}$$

Per trobar el coeficient de fricció plantegem el balanç de forces però en la direcció horitzontal. Com que sabem que va a velocitat constant, $a_x = 0$:

$F_x - F_R = 0 \Longrightarrow F_R = F \cdot \cos 30º = 3'46$ N

Si $F_R = \mu \cdot N$, aïllant el coeficient de fricció obtenim:

$\boxed{\mu = 0'2}$

b) Apliquem la relació que hi ha entre la potència, la força i la velocitat i obtenim:

$P = F_x \cdot v = 3'46 \cdot 0'5 = \boxed{1'73 \text{ W}}$

c) La definició del treball és $W = F_R \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha$, on α és l'angle entre la força i el desplaçament. En aquest cas la força de fricció s'oposa al moviment i per tant $\alpha = 180º$.

Hem de calcular la distància recorreguda en 3 segons, però com que va a velocitat constant podem utilitzar les expressions per al moviment rectilini i uniforme:

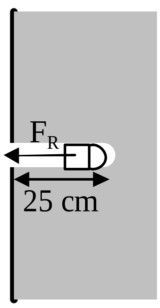
$x = 0'5 \cdot 3 = 1'5$ m

$W_{FR} = 3'46 \cdot 1'5 \cdot \cos 180º = \boxed{-5'19 \text{ J}}$

E.5.2. Un projectil que pesa 500 g es llança contra una paret a una velocitat de 600 m/s i penetra dins de la paret una distància de 25 cm. Determineu:

a) L'energia cinètica inicial de la bala.
b) El treball que ha fet la paret contra la bala.
c) La resistència, suposada constant, que ha oposat la paret.

Solució



a) Substituint a la fórmula de l'energia cinètica obtenim:

$E_{c0} = \frac{1}{2} m v^2 = \boxed{90.000 \text{ J}}$

b) Quan és a dins de la paret l'única força que actua sobre la bala és la resistència de la paret (F_R). Aplicant el teorema del treball i l'energia cinètica:

$W_{total} = \Delta E_c = E_c - E_{c0} = 0 - 90.000 = \boxed{-90.000 \text{ J}}$

c) A partir de la definició del treball, com que el treball total correspon al que fa la resistència, obtenim el seu valor:

$F_R = W/(\Delta x \cdot \cos 180º) = -90.000/(0'25 \cdot -1) = \boxed{36.000 \text{ N}}$

Tornem-hi…

P.5.1 Un balí de 15 grams es dispara amb una velocitat de 450 m/s i travessa un tauló de 10 cm de gruix. El tauló oposa una resistència de 1800 N. Calculeu:

a) L'energia cinètica inicial del balí.
b) El treball que fa el tauló sobre el balí.
c) L'energia cinètica i la velocitat amb què surt el balí del tauló.

Solució: a) 1518,75 J, b) -180 J, c) 1338'75, 422'5 m/s

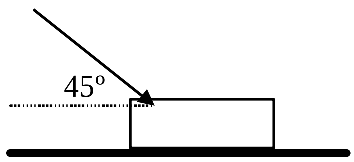
P.5.2 Un camió de 6 tones de massa va a una velocitat de 72 km/h. De cop i volta, frena i s'atura al cap de 100 metres. Calculeu:

a) L'acceleració de frenada del camió.
b) La força que han de fet els frens perquè el camió s'aturi al cap dels 100 metres.
c) El treball que han fet els frens.
d) Expliqueu amb què es transforma l'energia cinètica durant la frenada.

Solució: a) -2 m/s^2, b) -12.000 N, c) -1'2 · 10^6 J

P.5.3 Premem amb una força de 50 N un bloc de 10 kg de massa de manera que es desplaça sobre una superfície horitzontal de coeficient de fricció 0'2. Calculeu:

a) L'acceleració amb què es mou la massa.
b) El treball que fan totes les forces que actuen sobre el cos quan ha recorregut 250 m.
c) La velocitat que adquireix al cap d'aquests 250 m.



Solució: a) 0'867 m/s^2, b) 2171'33 J, c) 20'83 m/s.

P.6. Conservació de l'energia

Definició

P.6.1 **Energia mecànica**. Definim l'energia mecànica d'un sistema com la suma de l'energia potencial i l'energia cinètica d'un sistema.

$$\boxed{E_m = E_c + U} \qquad (10)$$

P.6.2 **Teorema de la conservació de l'energia mecànica**. Distingirem dos casos:

1) *Si el treball total realitzat per les forces no conservatives és zero.* L'energia mecànica d'un sistema es conserva si el treball total realitzat per totes les forces no conservatives és zero.

$$\boxed{\Delta E_m = 0 \Longrightarrow E_{m0} = E_{mf}} \qquad (11)$$

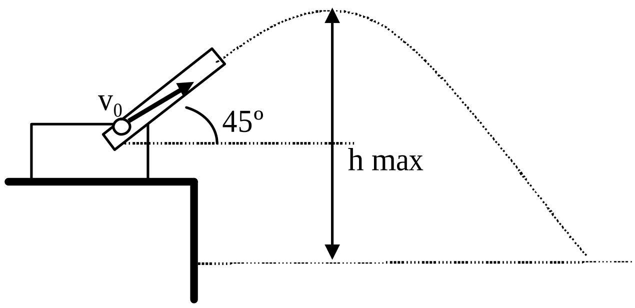
2) *Si el treball total realitzat per les forces no conservatives no és zero*. L'energia no es crea ni es destrueix, sinó que es transforma. Per tant, la variació d'energia mecànica experimentada en un procés és igual a la suma dels treballs realitzats per les forces no conservatives sobre el sistema:

$$\boxed{\sum W_{nc} = ?\,E_m = E_{mf} - E_{m0}} \qquad (12)$$

Exercicis

E.6.1. Un canó llança un projectil de 200 g amb una velocitat de 100 m/s i amb un angle de 45º respecte a l'horitzontal des d'un penya-segat de 100 m d'altura. Negligint la resistència de l'aire, calculeu:

a) La velocitat amb què el projectil impacta a l'aigua.
b) L'altura màxima que assoleix el projectil.
c) La velocitat que porta quan es troba a 150 metres d'altura.



Solució

a) Com que no hi ha fricció, sabem que: $E_{m0} = E_{mf}$
Prenem com a origen d'energia potencial gravitatòria el nivell d'impacte amb l'aigua (h=0). Inicialment, el projectil porta velocitat i està situat a una altura determinada. Quan impacti amb l'aigua, no tindrà energia potencial gravitatòria i la seva energia cinètica haurà augmentat.

$$E_{c0} + U_{pg} = E_{cf} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

Substituint els valors s'obté:

$$\boxed{v = 109'36 \text{ m/s}}$$

b) Si volem calcular l'altura màxima, compararem el punt inicial amb el punt d'altura màxima, sabent que en aquest punt la component vertical de la velocitat s'anul·la i només hi ha component horitzontal (vegeu els problemes corresponents al tir parabòlic en l'apartat de cinemàtica). Per tant, la velocitat en el punt més alt és:
$\mathbf{v_x}$ = v· cos 45º = **70'71 m/s**

Llavors,

$$E_{c0} + U_{pg0} = E_{cf} + U_{pg\,final}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_x{}^2 + mgh_{màx}$$

Aïllant d'aquesta darrera expressió el valor de l'altura màxima obtenim:

$\boxed{h_{màx} = 355'1 \text{ metres}}$ (respecte al nivell de l'aigua)

c) Plantegem la conservació de l'energia mecànica entre el punt inicial i el punt d'altura *h* = 150 m. En aquest darrer punt hi haurà energia potencial gravitatòria (evidentment tenim altura) i energia cinètica:

$$E_{c0} + U_{pg0} = E_{cf} + U_{pg\ final}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

D'aquesta darrera expressió aïllem *v* i aconseguirem la velocitat a *h*=150 m:

$\boxed{v = 94'97\ m \cdot s^{-1}}$

E.6.2. Un pèndol de 70 cm de longitud, de l'extrem del qual penja una massa de 100 g, pot oscil·lar lliurement al voltant de l'altre extrem. El deixem anar des d'una posició que forma un angle de 70º amb la vertical. Calculeu:

a) La velocitat que portarà el pèndol quan passi per la part més baixa.
b) La tensió de la corda quan es troba a la part més baixa del moviment.
c) L'energia cinètica i la velocitat del pèndol quan aquest forma un angle de 20º amb la horitzontal.

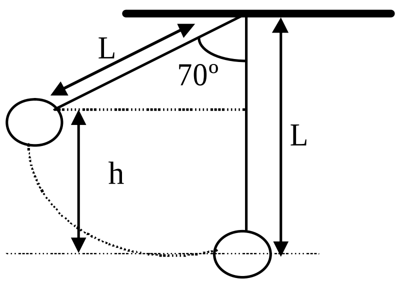
Solució

a) Apliquem el principi de conservació de l'energia, ja que podem considerar negligibles les friccions amb l'aire.

Prenem l'origen d'energia potencial gravitatòria en el punt més baix de la trajectòria. D'aquesta manera, a la posició inicial, la massa té energia potencial gravitatòria (ja que la deixem anar), i a baix de tot (posició final) té energia cinètica.

$E_{m0}=E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} = E_{cf}$

Hem de trobar l'altura inicial. Si ens fixem en el dibuix, podem comprovar que:



h = L – L· cos 70º =
=0'7 · (1 – cos 70º) = **0'46 m**

Així:

$$m\cdot g\cdot h = \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}m v^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \boxed{3\ m/s}$$

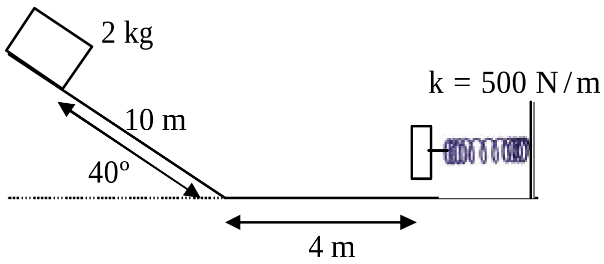
b) Per trobar la tensió a la part més baixa hem de fer el balanç de forces en la direcció vertical. Plantegem el diagrama del cos lliure, tenint en compte que el cos descriu un moviment circular, i per tant, té acceleració normal en la direcció que uneix el cos amb el centre del cercle descrit. D'aquesta manera:

$$T - P = m\cdot a_n \quad\Longrightarrow\quad T = mg + m\frac{v^2}{R} = \boxed{2'26\ N}$$

E.6.3. Un bloc de 2 kg es llança des de la part més alta d'un pla inclinat de 10 m de longitud i un angle d'inclinació de 40º amb una velocitat de 5 m/s. Quan arriba a baix es mou per una superfície horitzontal. Després de recórrer 4 m xoca amb una molla de massa negligible i de constant elàstica de 500 N/m. Si durant tot el recorregut podem negligir la fricció, calculeu:

a) La velocitat amb què el bloc arriba a baix del pla inclinat.
b) La compressió màxima de la molla.
c) La velocitat que porta el bloc quan la molla està comprimida 10 cm.

Solució



a) Apliquem el teorema de la conservació de l'energia entre el punt més alt i el punt més baix del pla inclinat. Com que inicialment el cos té velocitat, el balanç és el següent:

$$E_{m0}=E_{mf} \quad\Longrightarrow\quad U_{pg0} + E_{c0} = E_{cf}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

Busquem l'altura inicial per trigonometria: **h** = 10· sin 40º = **6'43 m** .

Aïllant la velocitat obtenim $\boxed{v = 12'29\ m/s}$

b) Tota l'energia cinètica que té quan arriba a baix del pla inclinat es converteix en energia potencial elàstica quan la molla es comprimeix del tot, ja que no hi ha pèrdua d'energia pel camí (no hi ha fricció). És evident que quan estigui del tot comprimida la massa estarà en repòs, i per tant, no hi haurà energia cinètica.

$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow E_c = U_{pe}$

$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2$ i d'aquí obtenim $\boxed{x = 0'77 \text{ m}}$

c) Quan la molla està comprimida 10 cm, el bloc té energia cinètica i energia potencial elàstica, ja que la compressió màxima es produeix a 60 cm (v = 0). Apliquem un altre cop el teorema de conservació de l'energia entre el punt més baix del pla inclinat i el punt en què la molla està comprimida 10 cm:

$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow E_c = U_{pef} + E_{cf}$

$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_f^2 + \frac{1}{2} kx^2$ i aïllant v_f obtenim: $\boxed{v_f = 12'2 \text{ m/s}}$

E.6.4. Repetiu el problema anterior però suposant que entre la superfície del pla inclinat i el bloc hi ha un coeficient de fricció de 0'2 i que entre la superfície horitzontal i el bloc hi actua una fricció de 0'3.

Solució

d) Aplicarem el teorema de conservació de l'energia, però ara tenim fricció. Per tant, l'aplicarem per al cas de forces no conservatives:

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

Substituint cada una de les expressions anteriors, obtenim:

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = E_{cf} - U_{pg0}$

La força de fricció val $\mu \cdot N$, on N és la força normal. Si apliquem la segona llei de Newton per a les components perpendiculars al pla inclinat podem trobar el valor d'aquesta força:

$N = P_y = P \cdot \cos 40^o = 2 \cdot 9'8 \cdot \cos 40^o = 15 \text{ N}$
$\mathbf{F_R} = 0'2 \cdot 15 = \mathbf{3\ N}$

Tornant a l'expressió de la conservació de l'energia:

$- 3 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot v^2 - 2 \cdot 9'8 \cdot 6'43$
$\boxed{v = 9'79 \text{ m/s}}$

e) Aplicant el teorema de conservació de l'energia quan intervenen forces no conservatives:
$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ = U_{pe} - E_c$

Com que ara ens trobem sobre una superfície horitzontal i hi ha equilibri en la direcció vertical, llavors N = P. I així:

$\mathbf{F_R} = \mu \cdot N =$ **5'88 N**

Substituint a l'expressió anterior:

$$-5'88 \cdot (4 + x) = \frac{1}{2} 500 \cdot x^2 - \frac{1}{2} 2 \cdot 9'79^2$$

(Noteu que la fricció actua durant els 4 metres que hi ha de distància entre el pla inclinat i la molla, però també a la distància x *mentre es comprimeix la molla!)*

Resolent l'equació de segon grau s'obté $\boxed{x = 0'61 \text{ m}}$

f) Aplicant el mateix procediment que en els apartats anteriors:
$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ = (U_{pe} + E_{cf}) - E_c$

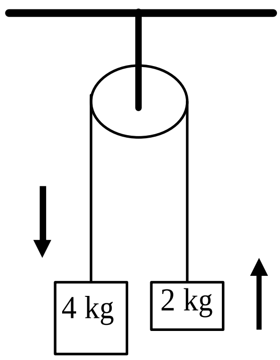
$$-5'88 \cdot 4'1 = \left(\frac{1}{2} 500 \cdot 0'1^2 + \frac{1}{2} 2 \cdot v^2 \right) - \frac{1}{2} 2 \cdot 9'79^2$$

Aïllant la velocitat obtenim: $\boxed{v = 8'32 \text{ m/s}}$

E.6.5. Dos cossos de 4 kg i 2 kg de massa, respectivament, estan units per un cable inextensible mitjançant una politja de massa negligible. Utilitzant el principi de la conservació de l'energia, trobeu la velocitat de les masses quan la massa de 2 kg ha baixat 2 metres.

Solució

Prenem com a valor zero de l'energia potencial el nivell en què es troben les dues masses inicialment. Com que no hi ha fricció, al final els dos cossos hauran adquirit energia cinètica, el cos de 2 kg haurà guanyat energia potencial (haurà pujat respecte al nivell zero d'energia potencial) i el cos de 4 kg haurà perdut energia potencial (haurà baixat respecte al nivell zero d'energia potencial).



$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow 0 = E_c + U_{pg}$

Substituint les expressions de l'energia s'obté:

$$0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 - m_1 g h_1 + m g h_2$$

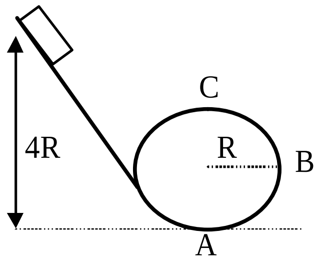
(Noteu que les dues velocitats del cos 1 i el cos 2 són les mateixes, ja que la corda no s'estira, sinó que es desplaça la mateixa distància d'un costat i de l'altre; per tant, com que també es mouen amb la mateixa acceleració, les dues masses adquireixen la mateixa velocitat.)

$$0 = \frac{1}{2}4v^2 + \frac{1}{2}2v^2 - 4 \cdot 9'8 \cdot 2 + 2 \cdot 9'8 \cdot 2$$

$$\boxed{v = 3'61 \text{ m/s}}$$

5.6.6. Un cos es deixa anar per un carril sense fricció des d'una altura de 4R. Quan arriba a baix fa voltes dins d'un *looping* de radi R. Calculeu:

a) La velocitat que porta el cos en el punt més baix del *looping* (A).
b) La velocitat que porta el cos en el punt més alt del *looping* (C).
c) La força que fa el carril sobre el cos en els punts A, B i C.
d) La velocitat mínima amb què s'hauria de llançar perquè fes una volta completa al ris.



Solució

a) Prenem com a origen d'energia potencial gravitatòria el punt més baix del carril. Apliquem el teorema de la conservació de l'energia entre el punt inicial —com que es deixa anar només té energia potencial gravitatòria— i el punt de baix (només hi ha energia cinètica).

$$E_{m0} = E_{mf} \Rightarrow U_{pg0} = E_c$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m\, v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \boxed{\sqrt{8gR} \text{ m/s}}$$

b) Tornem a aplicar la conservació de l'energia però ara entre el punt inicial i el punt de dalt del *looping* (C):

$$E_{m0} = E_{mf} \Rightarrow U_{pg0} = E_c + U_{pg}$$

$$m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} m\, v^2 + m \cdot g \cdot h$$

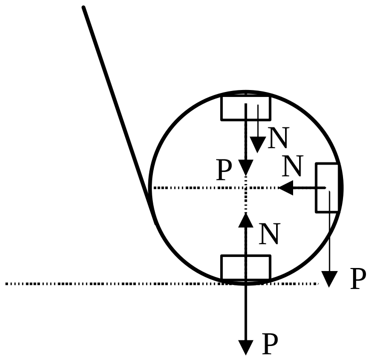
$$4mgR = \frac{1}{2} mv^2 + 2mgR \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{4gR} \text{ m/s}}$$

c) La força que fa el carril sobre el cos és la força normal. Cal fer un balanç de forces en els punts A, B i C:

Punt A:

$N - P = m \cdot a_n$

$N = mg + m\dfrac{v^2}{R} = 9mg$ N



Punt C:

$N + P = m \cdot a_n$

$N = m\dfrac{v^2}{R} - mg = 3mg$ N

Punt B:

$N = m \cdot a_n$

$N = m \cdot \dfrac{v^2}{R} = 6mg$ N

d) Per poder fer una volta al *looping* la velocitat mínima que hauria de portar al punt de dalt es calcula imposant que a dalt la normal valgui 0. Llavors:

$P = m \cdot a_n = m \cdot \dfrac{v_{min}^2}{R}$ i $\boxed{v_{min} = \sqrt{Rg}\ \ m/s}$

Per trobar la velocitat amb què s'hauria de llançar inicialment apliquem la conservació de l'energia entre el punt inicial i el punt més alt del *looping*, on coneixem la velocitat i l'altura.

$E_{m0} = E_{mf} \Longrightarrow U_{pg0} = E_c + U_{pg}$

$m \cdot g \cdot h_0 = \dfrac{1}{2} m\, v_{min}^2 + m \cdot g \cdot h$

$mgh_0 = \dfrac{1}{2} m\left(\sqrt{gR}\right)^2 + 2mgR \Longrightarrow \boxed{h_0 = 3R}$

E.6.7. Un cos de 5 kg de massa comprimeix 20 cm una molla sobre una taula horitzontal de coeficient de fricció 0'4. Quan deixem anar la molla el cos recorre 50 cm sobre la taula horitzontal i s'atura. Calculeu:

g) La constant elàstica de la molla.
h) La velocitat amb què el cos abandona la molla.

Solució

a) Com que hi ha fricció, apliquem el teorema de la conservació de l'energia però amb forces no conservatives. Com que al final s'atura, s'ha transformat tota l'energia potencial elàstica que tenia la molla en calor per fricció.

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = 0 - U_{pe}$

$$-\mu \cdot N \cdot ?\, x = -\frac{1}{2} kx^2$$

(Noteu que Dx representa la distància que frega el cos sobre la taula i que val 50 cm; en canvi x *representa la compressió de la molla, d'un valor de 20 cm.)*

Substituint trobem el valor de la constant elàstica:

$$\boxed{k = 490\ N/m}$$

b) Apliquem el teorema de la conservació de l'energia amb forces no conservatives:

$W_{nc} = \Delta E_m = E_{mf} - E_{m0}$

$F_R \cdot \Delta x \cdot \cos 180^o = E_c - U_{pe0}$

$$-\mu \cdot N \cdot x = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\boxed{v = 1'53\ m \cdot s^{-1}}$$

Tornem-hi...

P.6.1 Un cos de 50 kg de massa es llança verticalment i cap amunt amb una velocitat de 20 m/s. A partir del teorema de la conservació de l'energia, calculeu:

a) L'altura que assoleix el projectil.
b) La velocitat que porta el projectil quan és a 10 m d'altura.

Solució: a) 20'4 m, b) 14'28 m/s

P.6.2 Es deixa anar una bola d'acer de 800 g de massa des d'una altura desconeguda. Quan arriba a terra porta una velocitat de 40 m/s. Calculeu:

a) L'altura inicial des de la qual s'ha deixat anar la bola.
b) La distància que ha recorregut la bola quan porta una velocitat de 20 m/s.

Solució: a) 81'6 m, b) 61'22 m

P.6.3 Una caixa de 30 N es deixa anar des de la part més alta d'un pla inclinat de 5 m d'altura i una inclinació de 30º. Si entre la caixa i la superfície del pla inclinat hi ha un coeficient de fricció de 0'25, calculeu:

a) La velocitat quan arriba a baix del pla inclinat.
b) L'energia perduda en forma de calor a causa de la fricció.

Solució: a) 7’45 m/s, b) -64’9 J.

P.6.4 Disparem un cos de 200 g per una superfície horitzontal sense fricció a una velocitat de 4 m/s. A un metre de distància hi ha un pla inclinat (de fricció negligible) de 50º d’inclinació. Calculeu la distància que recorrerà el cos per sobre la superfície del pla inclinat.

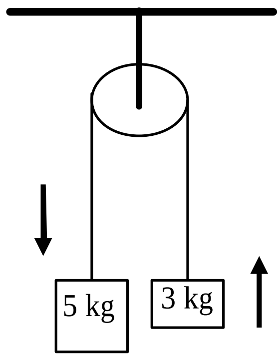
Solució: 1’06 m.

P.6.5 En el problema anterior suposeu que durant tot el recorregut hi ha actuat una fricció de μ = 0’32. Es demana:

a) Arribarà el cos a pujar pel pla inclinat? En cas afirmatiu determineu la velocitat amb què arriba a baix del pla inclinat. En cas contrari, determineu l’espai recorregut damunt del pla inclinat.
b) Si la resposta de l’apartat *a* ha estat afirmativa, determineu l’altura màxima que assoleix el cos damunt del pla inclinat.
c) Quina ha estat la pèrdua d’energia en forma de calor deguda a la fricció?

Solució: a) Sí, 3’12 m/s, b) 0’3 m, c) -0’524 J.

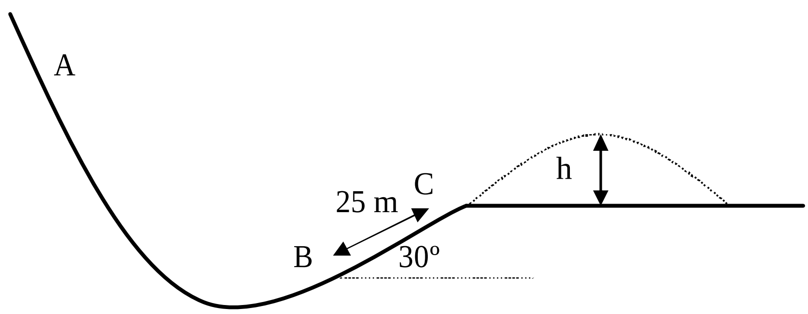
P.6.6 Dues masses de 5 kg i 3 kg estan unides amb una corda mitjançant una politja sense fricció ni massa, tal com indica la figura. A partir del teorema de conservació de l’energia, determineu la velocitat final de la massa de 3 kg quan aquesta massa ha pujat 2 metres.



Solució: 3’13 m/s

P.6.7 Un esquiador de 80 kg de massa surt des del punt A i arriba fins al punt B amb una velocitat de 35 m/s. Quan passa per C la seva velocitat és de 20 m/s. Sabent que la distància entre B i C és de 25 metres, calculeu:

a) L’energia que perd per fricció en el tram que va de B a C i el valor de la força de fricció en aquest tram (suposada constant).
b) Si la pista s’acaba al punt C i l’esquiador fa un salt parabòlic, quina és l’altura

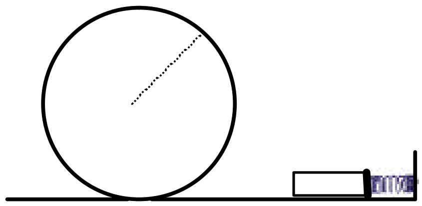


màxima que arribarà (mesurada sobre C)? Negligiu les friccions amb l’aire.

Solució: a) -23200 J, b) 5'1 m

P.6.8 Una massa de 4 kg comprimeix 10 cm d'una molla de constant elàstica 1000 N/m. A 30 cm del cos hi ha un ris de 50 cm de radi. Si durant el trajecte no hi ha fricció,

a) Esbrineu si la massa farà la volta completa al ris.
b) Quina és la compressió que s'hauria de fer a la molla perquè fes la volta?
c) Quina força fa el carril a la part inferior del ris?



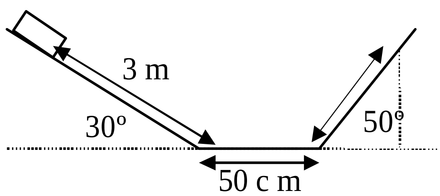
Solució: a) no fa la volta, b) 0'31 m, c) 59'17 N.

P.6.9 Feu el problema anterior però suposant que sobre la superfície horitzontal hi actua una fricció de μ=0'2.

Solució: a) no, b) 0'32 m, c) 49'79 N.

P.6.10 Un bloc de 0'5 kg de massa es deixa anar des de la part més alta d'un pla inclinat de 3 metres de longitud i un angle d'inclinació de 30º. Quan arriba a la part més baixa, es mou per una superfície horitzontal de 50 cm de longitud i torna a pujar per un pla inclinat de 50º d'inclinació. Si en el pla horitzontal hi ha un coeficient de fricció de 0'2, i en els plans inclinats la fricció es negligible, determineu:

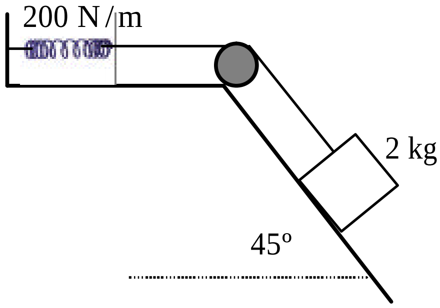
a) La velocitat amb què arriba a la part inferior del segon pla inclinat.
b) La distància que puja pel segon pla inclinat abans d'aturar-se.
c) Si en el primer pla inclinat hi hagués una fricció de μ=0'15, arribaria el cos a pujar pel segon pla inclinat? En cas afirmatiu, determineu l'altura que pujaria per aquest pla inclinat.



Solució: a) 4'43 m/s, b) 1'3 m, c) sí, 0'795 m.

P.6.11 Un bloc de 2 kg situat sobre un pla inclinat amb fricció s'uneix a una molla de massa negligible de constant k = 120 N/m. Es deixa anar el sistema quan la molla no està deformada i el bloc es mou 15 cm cap avall abans d'aturar-se. Trobeu:

a) El coeficient de fricció dinàmic entre la superfície i el bloc.
b) L'energia perduda per fricció.

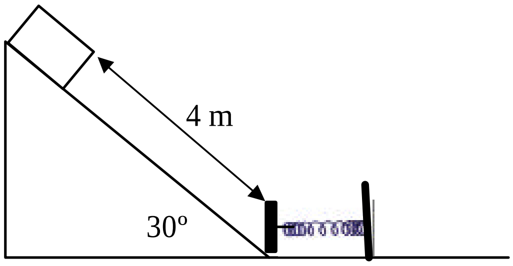


Solució: a) 0'24, b) -0'519 J

P.6.12 Una massa de 2 kg es deixa anar per un pla inclinat de 30º. Quan ha recorregut una distància de 4 m arriba al final del pla inclinat i xoca amb una molla sense massa i de constant elàstica 100 N/m. Si el coeficient de fricció entre la massa i el pla inclinat és de 0'2 , trobeu:

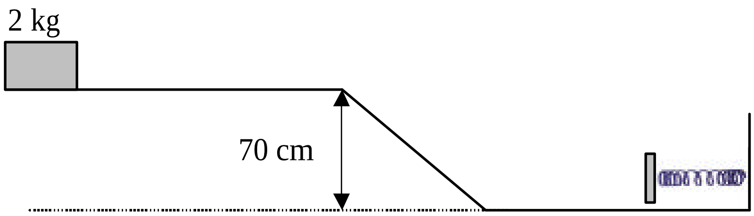
a) La compressió màxima de la molla.
b) Fins a quin punt tornarà a pujar de nou pel pla inclinat, després de deixar la molla?

(Suposeu que en el pla horitzontal no hi ha fricció.)



Solució: a) 0'716 m, b) 1'94 m.

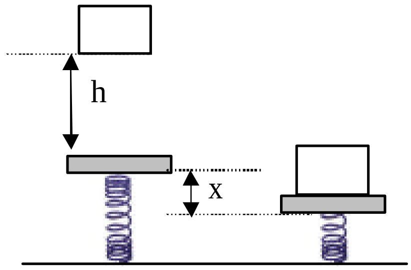
P.6.13 En el sistema de la figura, un cos de 2 kg es mou a 3 m/s sobre un pla horitzontal que està elevat 70 cm sobre el terra. Es demana:



a) Quina velocitat porta el cos quan ha comprimit 5 cm la molla, de constant elàstica 4000 N/m? Suposeu que no hi ha fricció.
b) Quina és la compressió màxima de la molla?
c) Quina velocitat portarà el cos quan torni a passar per la posició inicial?

Solució: a) 4'21 m/s, b) 0'106 m, c) la mateixa.

P.6.13. Deixem anar un cos de 100 g sobre una molla de constant elàstica 400 N/m. La distància entre el cos i la molla és de h = 5 m. Calculeu el desplaçament x de la molla.
Preneu g = 10 m/s^2.



Solució: 0’16 m.